Förderung und Erfassung begrifflichen Wissens in Analysis I Vorlesungen

Rolf Biehler

Universität Paderborn

Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khd^{m})

beruht auf gemeinsamen Studien und Vorträgen mit Thomas Bauer

und Elisa Lankeit

Universität Potsdam
16.10.2024

Gliederung

1. Einleitung RACI-Projekt
2. Studie 1: ConcepTests zur Aktivierung in Übungen: Vergleich zweier Umsetzungsbedingungen
3. Studie 2: ConcepTests in Vorlesungen zur Erfassung begrifflichen Wissens (Work in Progress)
4. Ausblick

1. RACI - Projekt

- Kooperation: Thomas Bauer (Marburg), Rolf Biehler (Paderborn), Elisa Lankeit (Paderborn, jetzt Hamburg)
- Entstehung im Rahmen des BMBF-Projektes WiGeMath *(Hochmuth, Biehler, Liebendörfer, Schaper 2022)*
- WiGeMath: Untersuchung von
  1. Vorkursen
  2. Lernzentren
  3. Einführungsvorlesungen
  4. Semesterbegleitende Maßnahmen
- (zu 4.) Einsatz von Peer Instruction in Übungsgruppen an der Universität Marburg mit Aufgaben von Bauer 2019

Bauer, T. (2019). *Verständnisaufgaben zur Analysis 1 und 2 für Lerngruppen, Selbststudium und Peer Instruction*. Springer Spektrum.

Hochmuth, R., Biehler, R., Liebendörfer, M., & Schaper, N. (2022). *Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen - Konzepte, Praxisbeispiele und Untersuchungsergebnisse*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64833-9

khd m kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Ausgangslage: Lernen in mathematischen Übungsgruppen

Anspruch der Übungen (Tutorien) im Mathematikstudium:

- Vergleich und Präsentation von Lösungen, Klären von Fragen, Bearbeiten von Verständnisproblemen, Gelegenheit zur Diskussion

Wirklichkeit (Beobachtungen):

- Viele Studierende sind zurückhaltend beim Stellen von Fragen.
- Übungsleiter erkennen oft die einer Frage zugrundeliegende Fehlvorstellung bzw. das tieferliegende Verständnisproblem nicht
- Vorstellen von Musterlösungen („Vorrechnen“) oft Hauptbestandteil.
  - effektiv, wenn Strategien expliziert werden (Ableitinger und Hermann 2011, Ableitinger 2012)
  - ungünstig: „Vorlesung im Kleinen“ (Beutelspacher et al. 2011)

Studie 1

- Universität Marburg Studienjahr 2018/19
  - Erfahrungen mit dem Einsatz seit 2014
- Analysis I und II (n =58)
- Publikationen

Bauer, T., Biehler, R., & Lankeit, E. (2022). Mini-Aufgaben in mathematischen Übungsgruppen zur Analysis: Charakteristika von Aufgaben und Abstimmungsverhalten von Studierenden.

In R. Hochmuth, R. Biehler, M. Liebendörfer, & N. Schaper (Hrsg.), *Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen - Konzepte, Praxisbeispiele und Untersuchungsergebnisse* (S. 515-543).

Bauer, T., Biehler, R., & Lankeit, E. (2023). ConcepTests in Undergraduate Real Analysis: Comparing Peer Discussion and Instructional Explanation Settings. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9, 426-460. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00167-y

Studie 1: Ansatz: Aktivierung durch Peer Instruction

- Eric Mazur (1997): Peer Instruction – Getting students to think in class. eingesetzt im Rahmen der Physikausbildung (Undergraduate Level, insbes. Nebenfachstudierende) zur Realisierung eines Inverted-Classroom-Konzepts
- Die Idee der Peer-Instruction
  – Herausfordernde, auf Konzepte bezogene Fragen (ConcepTest) stellen
  – Studierende verschiedene Antwortmöglichkeiten diskutieren lassen
- Vorschläge für Einsatz in der Mathematik
  – Calculus (Pilzer 2001, Miller, Santana-Vega & Terrell 2006)
  – Lineare Algebra (Cline, Zullo, Duncan, Stewart & Snipes 2013)
  – Algebra (Feudel & Unger, 2024)
- Hier: Einsatz in Übungsgruppen zur Analysis (Bauer 2019, 2019a)

Mini-Aufgaben mit peer discussion

Ablauf einer Peer-Instruction-Runde (im Sinne von Mazur 1997):

Phase 1 (2–5 min)	Einzelarbeit	Die Studierenden lesen den ConcepTest. Sie überlegen, welche der Antwortalternativen richtig ist, suchen Argumente dafür und Argumente gegen die anderen Alternativen.
	Voting 1	Entscheidung für eine der Antwortalternativen (Festlegung, committment)

↓

Phase 2 (5-10 min)	Gruppenarbeit „Peer Discussion“	„Überzeuge Deinen Nachbarn“: Gruppen von 2–3 Studierenden, die nicht alle dieselbe Antwortalternative gewählt haben, versuchen sich gegenseitig zu überzeugen.
	Voting 2	Neue Entscheidung für eine Antwortalternative auf Basis der Diskussion

↓

Phase 3 (optional)	Plenum	Abschließende Klärung durch die Lehrperson

Studie 1:
Exemplarische Aufgaben für die Übungen: Genau eine richtige Antwort

M19 Angenommen, wir wissen über eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass gilt

$$f(\tfrac{1}{n}) = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

d.h.

$$0 = f(1) = f(\tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{3}) = f(\tfrac{1}{4}) = f(\tfrac{1}{5}) = \ldots$$

Was kann man daraus folgern?

(1) Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
(2) Es gilt $f(0) = 0$
(3) Man kann beides folgern.
$\boxed{\text{(4) Man kann keines von beiden folgern.}}$

Abb. 19.12 Mini-Aufgabe M19

- Lösungsquote erste Abstimmung 26%
- Lösungsquote nach Peer discussion in der zweiten Abstimmung 56%

Bauer, T., Biehler, R., & Lankeit, E. (2022).

Exemplarische Aufgaben für die Übungen

M22 Wenn eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kein Maximum hat, dann

$\boxed{\text{(1) muss sie unstetig sein}}$
(2) muss sie unbeschränkt sein
(3) beides
(4) keines von beiden

Abb. 19.14 Mini-Aufgabe M22

- Lösungsquote bei erster Abstimmung 13%
- Lösungsquote bei zweiter Abstimmung 17%

Bauer, T., Biehler, R., & Lankeit, E. (2022).

Zuwachs zwischen Voting 1 und Voting 2

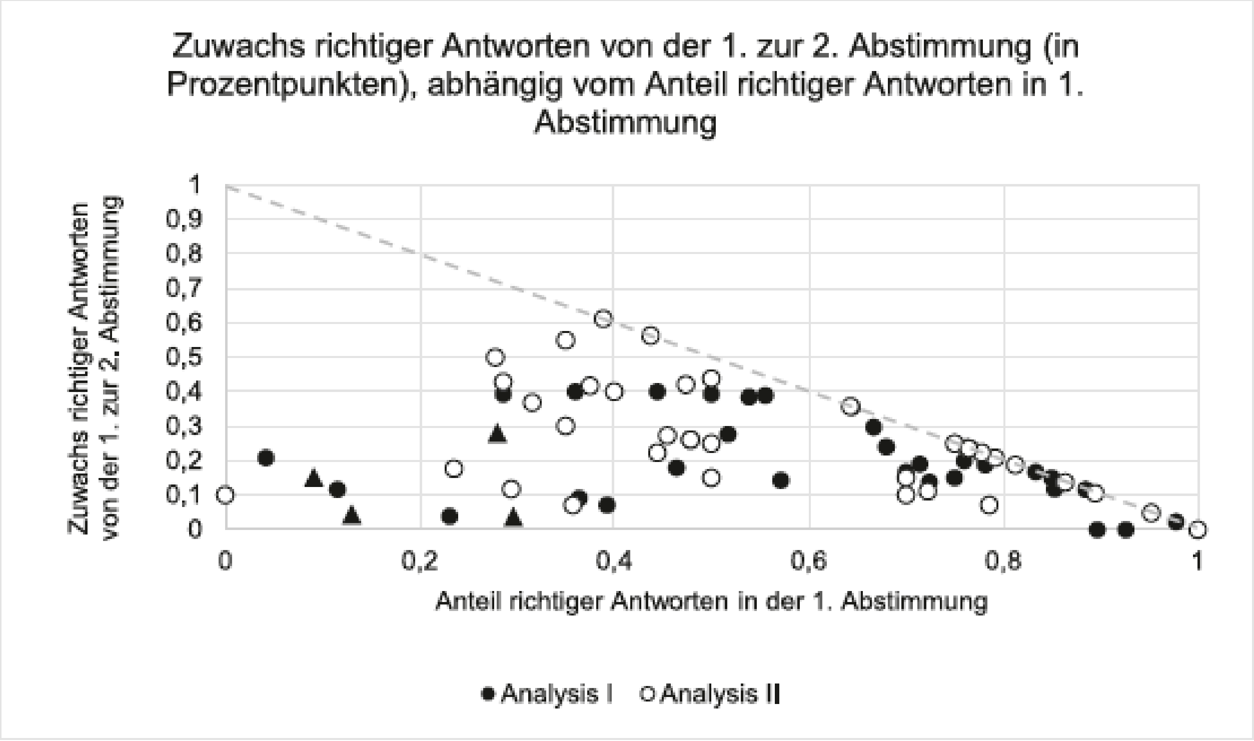


Abb. 19.4 Absoluter Zuwachs richtiger Antworten von der ersten zur zweiten Abstimmung in Prozentpunkten in Abhängigkeit vom Anteil der richtigen Antworten in der ersten Abstimmung bei den Mini-Aufgaben der Analysis I und II

Bauer, T., Biehler, R., & Lankeit, E. (2022).

Forschungsstand zur PI: Theorie

Theoretische Fundierung der Peer Discussion

- Ermöglicht Aktivierung in Form von fokussierter Informationsverarbeitung (im Sinne von Renkl 2011).
- Betont die Rolle der Interaktion (Chi 2009, Fonseca und Chi 2011) und des Peer Learning (vgl. Wentzel und Watkins 2017).
- Steht im Einklang mit interaktionistischen Sichtweisen (vgl. Bauersfeld 2000).

Forschungsstand zur PI: Empirie

Von Studierenden selbst-berichtete Wirkungen (generell bei ARS)

- Erhöhte Aufmerksamkeit, Beteiligung, Engagement, Lernqualität (siehe Kay & LeSage 2009)

Objektiver Lerngewinn

- gemessen als Zunahme des Anteils richtiger Antworten in der zweiten Abstimmung (z.B. Rao & DiCarlo 2000, Cortright, Collins & DiCarlo 2005)
  - Limitation: Welchen Anteil hat Peer Influence hieran?
- gemessen durch Ergebnisse bei isomorphen Fragen im direkten Anschluss an eine PI-Runde (im Fach Biologie durch Smith et al. 2009)
  - Deutung: nicht nur Peer Influence, sondern Near Transfer
- Ergebnisse von Smith et al. nicht ohne weiteres übertragbar auf andere Fächer, z.B. für Informatik nicht in gleicher Stärke reproduziert (Porter et al. 2011)
  - Fachspezifische Auffassungen, wann Fragen als „isomorph“ gelten
- gemessen durch FCI (force concept inventory) im Fach Physik (Crouch & Mazur 2001)
  - Far Transfer: Zunahme des konzeptuellen Verständnisses
  - Limitation: Vergleich verschiedener Studierendenjahrgange und Kurse

Motive Studie 1

- Zweifel an alleiniger Wirksamkeit von peer discussion
- Könnte nicht individuelle Auseinandersetzung mit den Miniaufgaben plus tutorielle Erklärungen ähnliche Effekte haben?

- Design Studie 1
  - Miniaufgaben mit Peer discussion vs. Tutorielle Erklärungen
  - Messung des Verständnisses durch die Leistung in der Semesterabschlussklausur (far transfer)

khd m kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

Einsatz der ConceptTests in der Studie 1

UNIVERSITÄT PADERBORN Die Universität der Informationsgesellschaft

Analysisübungen einmal wöchentlich, 90 min

- durchgeführt von studentischen Tutoren

Ca. 30 min zu Beginn der Übung:

- „Miniaufgabenphase“:
- Drei ConcepTests werden gestellt
- genaue Durchführung in zwei verschiedenen Varianten (nächste Folie)

- Anschließend Besprechung der Hausübungen

Durchführungsvarianten

Variante P (mit Peer Discussion)	Variante T (mit tutorieller Erklärung)
1. Der ConcepTest wird den Studierenden gezeigt. 2. Die Studierenden haben 1-2 min Zeit, selbst über die Aufgabe nachzudenken. (Keine Gespräche in dieser Zeit!) 3. Abstimmung (per Handkarten), welche Antwort die Studierenden für richtig halten 4. Die Studierenden setzen sich in Kleingruppen (2-3 Stud.) zusammen, die nicht alle für dieselbe Antwort gestimmt haben, und versuchen, einander von der eigenen Antwort zu überzeugen. (Ca. 5 min) 5. Zweite Abstimmung 6. Kurze Besprechung der richtigen Antwort (nach Mazur, 1997)	1. Der ConcepTest wird den Studierenden gezeigt. 2. Die Studierenden haben 1-2 min Zeit, selbst über die Aufgabe nachzudenken. (Keine Gespräche in dieser Zeit!) 3. Abstimmung (per Handkarten), welche Antwort die Studierenden für richtig halten 4. Der/die Tutor/in verkündet die richtige Lösung. 5. Ein/e Studierende/r erklärt, warum er diese Antwort gewählt hat. 6. Ausführliche Ergänzung des Tutors / der Tutorin inkl. Erklärung, warum die anderen Antworten falsch sind und auf welchen Fehlvorstellungen diese beruhen.

Forschungsfragen

- F1) Gibt es Unterschiede in der studentischen Bewertung des Einsatzes der ConcepTests und der Wahrnehmung der eigenen Aktivität im Tutorium zwischen den beiden verschiedenen Einsatzszenarien (P und T)?

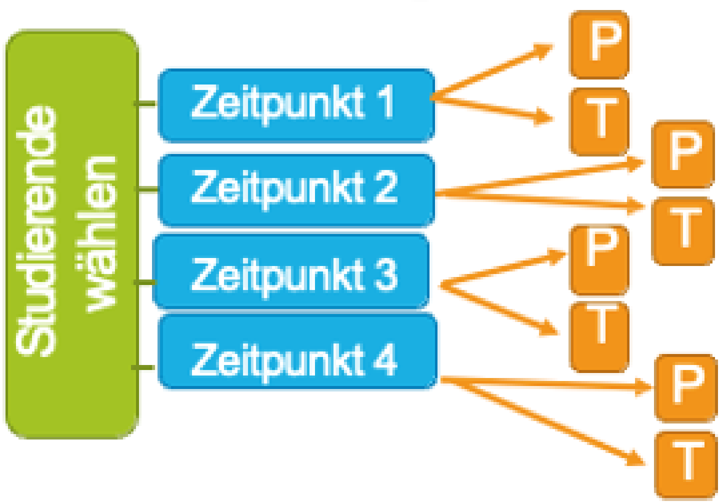
- F2) Gibt es Unterschiede in der Wirkung auf die Klausurleistung beim Einsatz von Peer Instruction (P) vs. ConcepTests ohne Peer-Discussion-Phase (T)?

Bauer, T., Biehler, R., & Lankeit, E. (2023). ConcepTests in Undergraduate Real Analysis: Comparing Peer Discussion and Instructional Explanation Settings. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *9*, 426-460. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00167-y

Einteilung der Studierenden in Analysis I und II

- Reguläre Vorlesung im zweiten bzw. dritten Fachsemester
- Fächer: Mathematik, Wirtschaftsmathematik, Physik, Lehramt Mathematik für Gymnasien

Studierende wählen Zeitpunkt, dann zufällige Aufteilung



Studiendesign: Datenerhebungen

1. Eingangsbefragung am Anfang des Semesters (vor der ersten Übung)
2. Ausgangsbefragung am Ende des Semesters (vorletzte Vorlesungswoche in Übung bzw. Vorlesung)
3. In jeder Übung Kurzabfrage zur Bewertung
4. Abstimmungsverhalten zu jedem ConcepTest
5. Erhebung der Punktzahlen in den einzelnen Klausuraufgaben

- 1,2,5 mit individuellem Code. Freiwillige Zustimmung der Codenutzung für die Klausuraufgaben

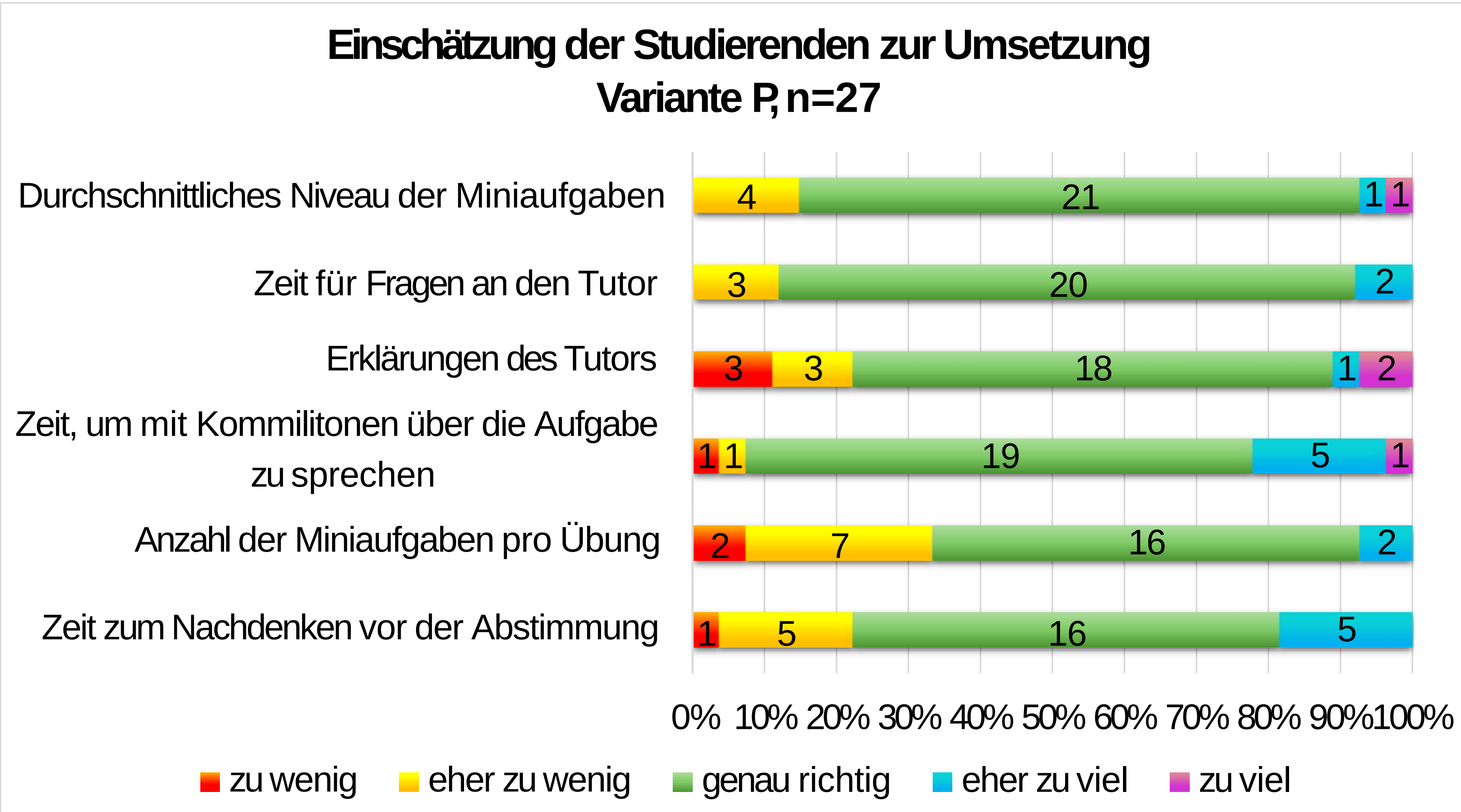
Bewertung der ConcepTests

Skala	**Gesamtgruppe (N=58)**	**Variante P (N=27)**	**Variante T (N=25)**		
	M (SD)	*M (SD)*	*M (SD)*	*p*	*d*
Selbsteinschätzung: Besseres Verständnis der Inhalte durch ConcepTests	4,79 (1,09)	4,86 (1,15)	4,68 (1,05)	0,414	-0,17
Selbsteinschätzung: Durch ConcepTests Bewusstsein für eigenen Kenntnisstand schaffen	4,79 (0,81)	4,82 (0,88)	4,66 (0,75)	0,377	-0,20
Persönliche Einstellung zu ConcepTests	4,38 (1,34)	4,37 (1,30)	4,35 (1,29)	0,927	-0,22

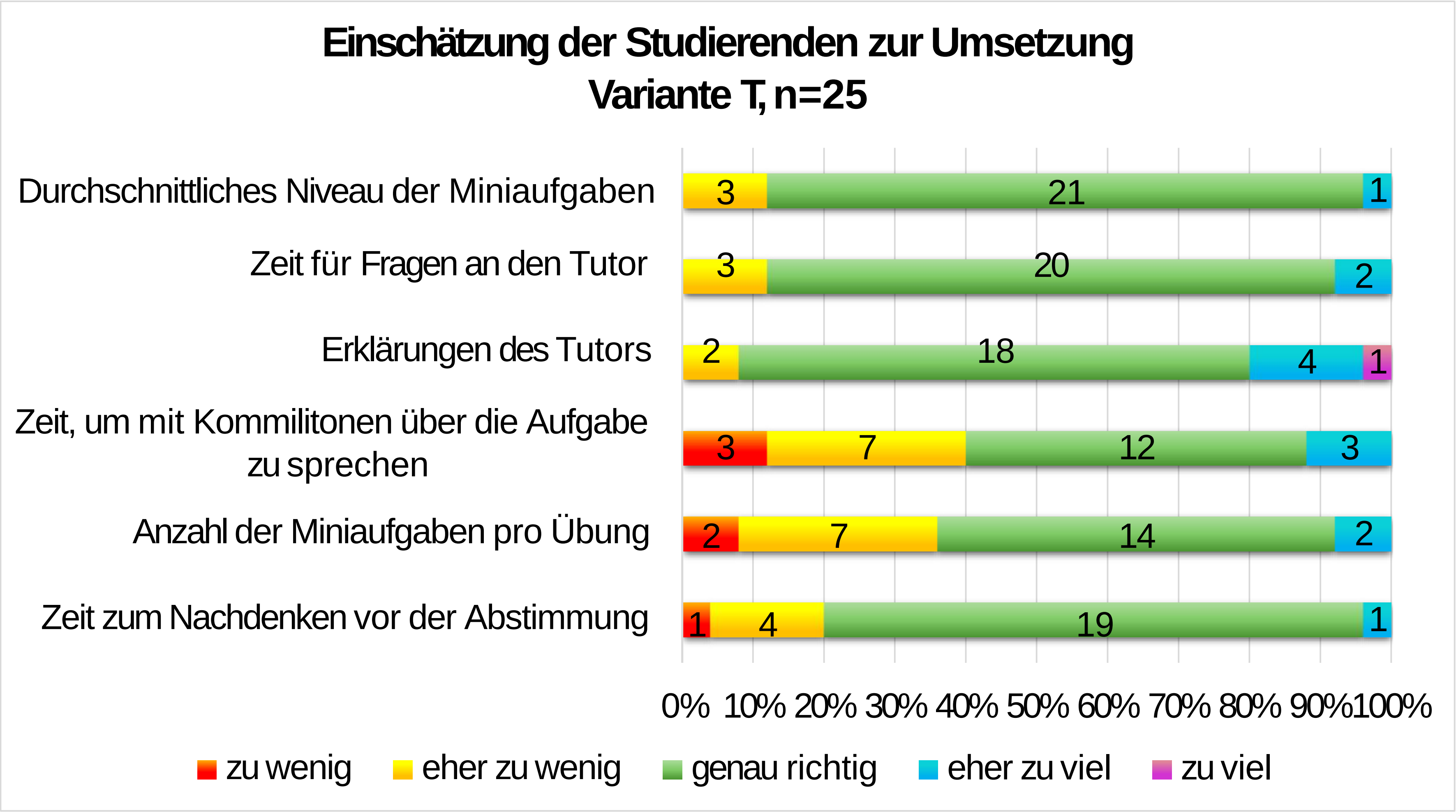
- Gute Gesamtbewertung
- Keine signifikanten Unterschiede zwischen den Varianten
- Besseres Verständnis und Bewusstsein für eigenen Kenntnisstand

6-stufige Likert-Skala: „trifft gar nicht zu“ (1) bis „trifft vollständig zu“ (6)

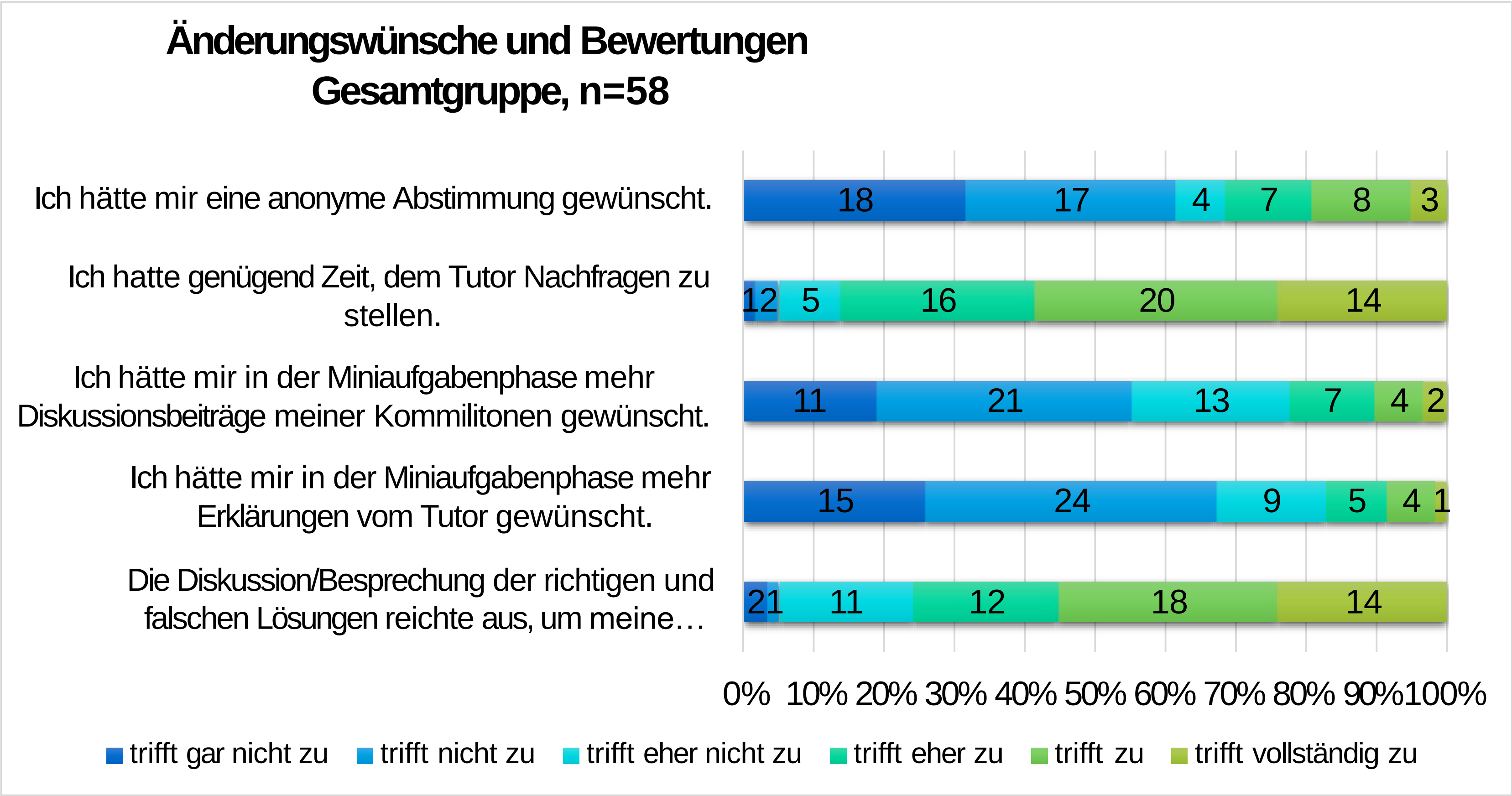
Bewertung der Umsetzung, Variante P



Bewertung der Umsetzung, Variante T

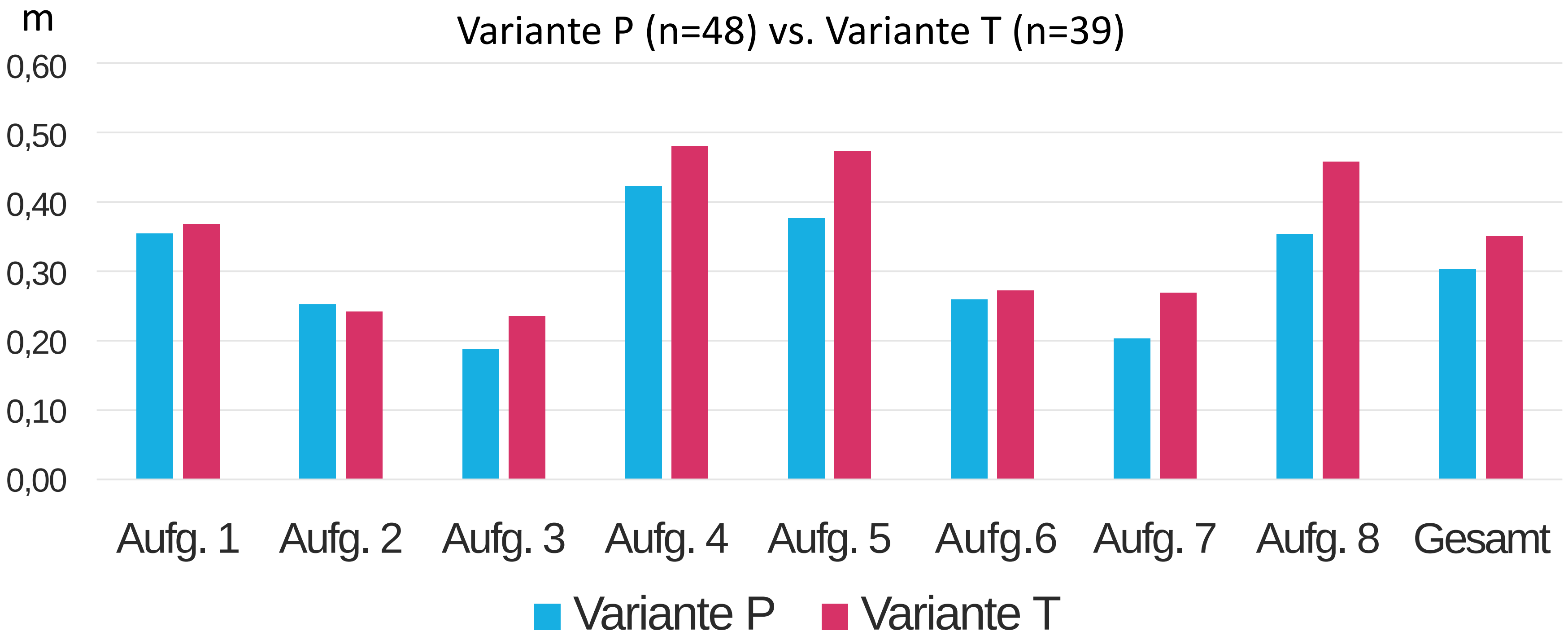


Änderungswünsche und Bewertungen



- Keine Unterschiede zwischen den Gruppen!

Vergleich der Klausurleistung: Analysis I

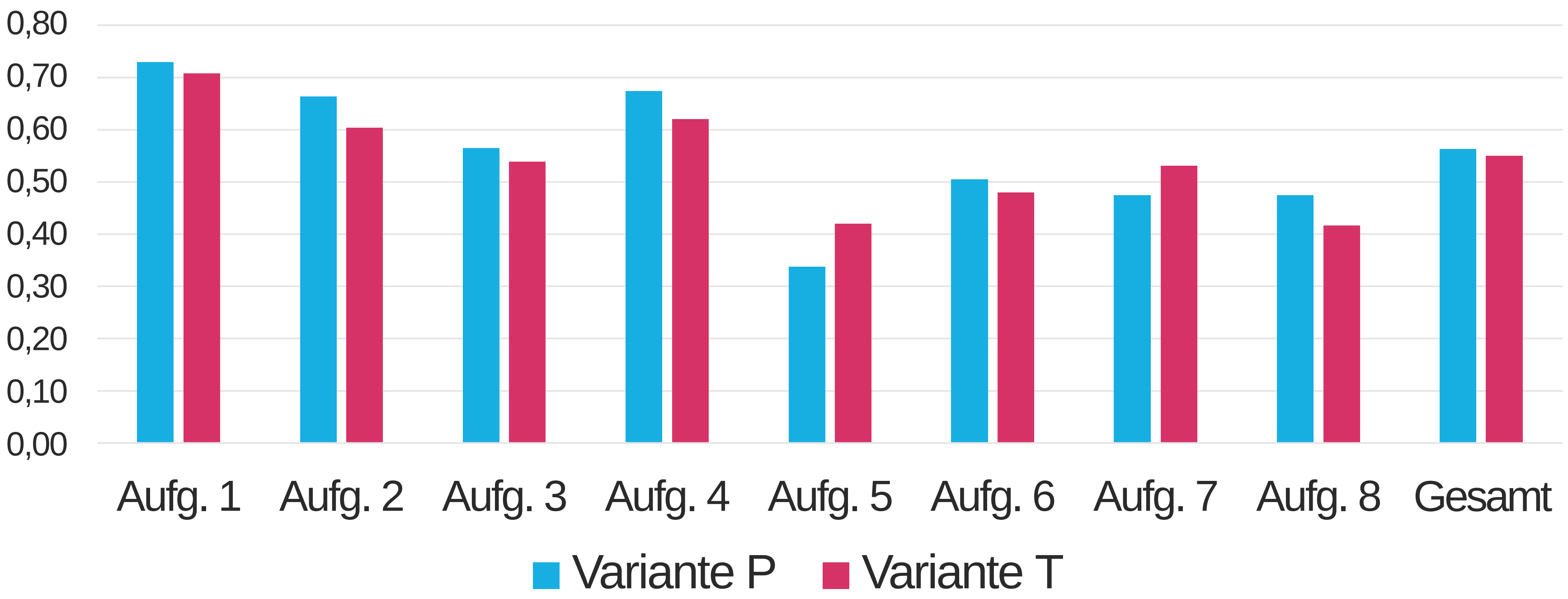


m: Mittelwert der erreichten Punktzahl / Erreichbare Punktzahl

Keine signifikanten Unterschiede: $p > 0{,}1$

Vergleich der Klausurleistung: Analysis II

Variante P (n=32) vs. Variante T (n=29)



m: Mittelwert der erreichten Punktzahl / Erreichbare Punktzahl

Keine signifikanten Unterschiede: $p > 0,1$

khd m kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Kann die Klausur überhaupt Effekte der verschiedenen Varianten messen?

- Treatment war sehr unterschiedlich: semesterlang, drei ConcepTests pro Woche
- Klausur hat einen Schwerpunkt in konzeptuellem Wissen, aber wieweit unterscheiden sich die konzeptuellen Aufgaben

Aufg.	Inhalt
1	PI-bezogen (11 Teilaufgaben)
2	Supremum
3	Folgenkonvergenz
4	Reihenkonvergenz
5	Grenzwerte von Funktionen
6	Stetigkeit
7	Differenzierbarkeit
8	Funktionenfolgen

Aufg.	Inhalt
1	PI-bezogen (11 Teilaufgaben)
2	Metrische Räume
3	Differenzierbarkeit
4	Extrema
5	Implizite Funktionen
6	Integration
7	Jordan-Messbarkeit
8	Differentialgleichungen

(grün) = Aufgabe zum konzeptuellen Wissen

(gelb) = Aufgabe mit prozeduralen Anteilen

Fazit

- Entgegen verbreiteter Annahme sollte es nicht für selbstverständlich gehalten werden, dass die Kleingruppendiskussion (Peer Discussion) der entscheidende Faktor für die Lernwirkung durch PI ist.
- Wir haben dies vorsichtig formuliert, denn die Nicht-Signifikanz, das Nicht-Verwerfen der Hypothese „Kein Unterschied“ bedeutet nicht, dass wir statistisch nachgewiesen hätten, dass kein Unterschied existiert. Würde man aus den Daten mit der relativ geringen Stichprobe ein Konfidenzintervall bestimmen, so wären Effekte in beide Richtungen mit den Daten kompatibel

- Mögliche Deutungen
  - Die Beschäftigung mit gut konstruierten Aufgaben an und für sich ist vielleicht der wesentliche Aspekt bei PI, nicht die gewählte methodische Variante.
  - Beide Varianten haben spezifische positive Wirkungen, die sich insgesamt ausgleichen

- Limitationen
  - Messung durch Klausur (misst andere Dinge?, too far transfer)
  - Kleine Stichproben

Einige offene Fragen

- Welche vertieften theoretischen Erklärungen gibt es für die Wirksamkeit der beiden Varianten?
- Kann man die beiden Varianten optimieren?
  - Kooperationsskripts
  - Optimierung der tutoriellen Erklärung
- Hängt es von den konkreten Aufgaben ab, ob Variante T oder P besser ist?
- Gibt es Unterschiede, je nach Gruppenzusammensetzung der Studis?
- Gibt es individuelle Präferenzen bei Studierenden für peer discussion vs. tutorielle Erklärungen?
  - Kann man die beeinflussen?

kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Studie 2 (Work in Progress)

Entwicklung eines Real Analysis Concept Inventory (RACI)

Perspektivische Anwendung eines solchen Tests

- Vergleich konventionelle Vorlesungen, Vorlesungen mit stärkerem Schwerpunkt auf konzeptuellem Wissen, insbesondere wenn Einsatz von Miniaufgaben
- Alternative Messung des Verständnisses, statt Klausur
- Universitätsübergreifender Vergleich (Monitoring) konzeptuellen Verständnisses in Analysis I und II Vorlesungen

Erste Veröffentlichung: Bauer, Biehler, Lankeit 2024. Designing a Concept Inventory for Real Analysis. Erscheint in INDRUM Proceedings 2024

Design des Tests: Inhalte

Test 1
(A) Vollständigkeit der reellen Zahlen
(B) Konvergenz von Folgen reeller Zahlen
(C) Konvergenz von Reihen reeller Zahlen

Test 2
(D) Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen einer reellen Variablen
(E) Differenzierbarkeit von Funktionen einer reellen Variablen.

- Je 16 MC Aufgaben mir jeweils 4-5 binären Einzelfragen (etwa 30 Minuten)
- Alle oder keine der Antwortmöglichkeiten kann richtig sein

Thema Integration wird oft erst ab Analysis II behandelt

Gestaltungsprinzipien der Tests (Aufbau auf Erfahrungen mit Mini-Aufgaben)

Inhalt

- Die Testaufgaben beinhalten Definitionen und Theoreme der eindimensionalen reellen Analysis.
- Sie gehen über das Abrufen von Erinnerungen hinaus und erfordern die Anwendung auf Situationen oder Beispiele.
- Die Aufgaben prüfen auch Verbindungen zu anderen Konzepten und Theoremen.

Kognitive Prozesse

- Die Testaufgaben sind so konzipiert, dass sie ohne Papier im Kopf gelöst werden können.
- Sie vermeiden komplexe Berechnungen und prozedurales Wissen.
- Es ist keine mehrstufige Argumentation oder komplexe Beweisführungen erforderlich.
- Es ist erforderlich, formale Darstellungen korrekt zu lesen und zu entschlüsseln
- Erinnerung an „Fakten“ aus der VL (Sätze und Theoreme) „genau“ oder „anschaulich“ erforderlich

Distraktoren

- auf häufige Missverständnisse von Studierenden eingehen, sofern bekannt
- Die Auswahl erfolgt auf der Grundlage von Forschungs- und Lehrerfahrung.

Arbeitsstand

- Erste Durchführung des Tests in 8 Kursen an 7 deutschen Unis (n = 391/336)
- Inhaltsvalidierung durch Experten ist erfolgt:
  - Vorwiegend sehr gute, mindestens gute Bewertung (Passung zum Thema)
  - Praktisch kein Vorschlag für Ergänzungen zu den 5 Themen
- Raschskalierung ist erfolgt (mehrdimensionale Modelle gegliedert nach den 5 Themen)
- Derzeit: kognitive Analyse der Einzelitems, Identifikation item- und aufgabenübergreifender schwierigkeitsgenerierender Faktoren
  - Verschiedene theoretische Ansätze zu konzeptuellem / prozeduralen Wissen, auch Bloomsche Taxonomie in Version von Anderson et al. (2001) (auch factual knowledge)
  - Grundproblem: Welche individuellen Schwächen sind auch LV-bedingt?
- Beschreibung von Kompetenzstufen
- Dissertationsprojekt (Betreuung Thomas Bauer). Studierende lösen Testaufgaben mit lautem Denken ohne zeitliche Restriktionen

kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Beispiel Reelle Zahlen

Aufgabe 3. Es sei a eine positive reelle Zahl. Gelten die folgenden Aussagen?

(1) Falls $a \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a^2 \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☐ *nein*

(2) Falls $a \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☐ *nein*

(3) Falls $a^2 \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☐ *nein*

(4) Falls $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☐ *nein*

Beispiel 1: Reelle Zahlen

Aufgabe 3. Es sei a eine positive reelle Zahl. Gelten die folgenden Aussagen?

(1) Falls $a \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a^2 \in \mathbb{Q}$. ☒ *ja* ☐ *nein*

(2) Falls $a \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☒ *nein*

(3) Falls $a^2 \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☒ *nein*

(4) Falls $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a \in \mathbb{Q}$. ☒ *ja* ☐ *nein*

Aufgabe3 Item	(1)	(2)	(3)	(4)
% korrekt	96	85	64	86

- Hypothesen über Denkprozesse, die zu richtigen und falschen Antworten führen können
- Erklärung von empirischen Schwierigkeiten
- Bewertung von schwierigen Items: Maßnahmen in der LV sinnvoll? Wenn ja, welche?

Beispiel 1: Reelle Zahlen

Aufgabe 3. Es sei a eine positive reelle Zahl. Gelten die folgenden Aussagen?

(1) Falls $a \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a^2 \in \mathbb{Q}$. ☒ *ja* ☐ *nein*

(2) Falls $a \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☒ *nein*

(3) Falls $a^2 \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☒ *nein*

(4) Falls $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a \in \mathbb{Q}$. ☒ *ja* ☐ *nein*

Aufgabe3				
Item	(1)	(2)	(3)	(4)
% korrekt	96	85	64	86

- (2) und (4) ca. 15 % Fehler überraschend und problematisch?

Beispiel 1: Reelle Zahlen

Aufgabe 3. Es sei a eine positive reelle Zahl. Gelten die folgenden Aussagen?

(1) Falls $a \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a^2 \in \mathbb{Q}$. ☒ *ja* ☐ *nein*

(2) Falls $a \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☒ *nein*

(3) Falls $a^2 \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a \in \mathbb{Q}$. ☐ *ja* ☒ *nein*

(4) Falls $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ ist, dann ist auch $a \in \mathbb{Q}$. ☒ *ja* ☐ *nein*

Aufgabe3 Item	(1)	(2)	(3)	(4)
% korrekt	96	85	64	86

- (3) Hypothesen für falsche Lösungen
  - „Keine Wurzel sichtbar, also unproblematisch“ (keine negative Evidenz, also richtig)
  - Schwierigkeit, sich ein Gegenbeispiel zu denken
  - War so direkt in VL vermutlich nicht dran?

Beispiel 2: Reelle Zahlen

Aufgabe 4. Es sei

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$$

eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Lassen sich die folgenden Aussagen daraus folgern?

(1) Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ☐ *ja* ☐ *nein*

(2) Falls $a_n \in \mathbb{Q}$ und $b_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gibt es ein $c \in \mathbb{Q}$, so dass $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ☐ *ja* ☐ *nein*

(3) Falls es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $c \in [a_N, b_N]$, dann gilt $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \geqslant N$. ☐ *ja* ☐ *nein*

(4) Falls $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl ist, für die $a_n \leqslant c$ und $c \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. ☐ *ja* ☐ *nein*

kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik (khdm)

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Beispiel 2: Reelle Zahlen

Aufgabe 4. Es sei

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$$

eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Lassen sich die folgenden Aussagen daraus folgern?

(1) Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ☒ *ja* ☐ *nein*

(2) Falls $a_n \in \mathbb{Q}$ und $b_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gibt es ein $c \in \mathbb{Q}$, so dass $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ☐ *ja* ☒ *nein*

(3) Falls es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $c \in [a_N, b_N]$, dann gilt $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \geqslant N$. ☐ *ja* ☒ *nein*

(4) Falls $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl ist, für die $a_n \leqslant c$ und $c \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. ☒ *ja* ☐ *nein*

Aufgabe 4				
Item	(1)	(2)	(3)	(4)
% korrekt	74	29	53	60

Aufgabe 4.1

(1) Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ☒ *ja* ☐ *nein*

26% falsch

- Aussage des Prinzips nicht erinnert: keine positive Evidenz für Existenz von c?
- Welche Rolle spielen Intervallschachtelungen in der VL als Formulierungen für die Vollständigkeit?

Aufgabe 4.2

(2) Falls $a_n \in \mathbb{Q}$ und $b_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gibt es ein $c \in \mathbb{Q}$, so dass $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ☐ *ja* ☒ *nein*

61 % falsch

- Oberflächliche Lektüre: Am Rande aus $\mathbb{Q}$, warum nicht im Innern?
- Zentraler Sinn von Intervallschachtelungen in $\mathbb{Q}$ für Zahlbereichserweiterung nicht erkannt/erinnert

- Vermutlich so nicht direkt in VL behandelt
- Unvollständigkeit von $\mathbb{Q}$ untergeordnetes Thema
- „Wo wird die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ in der Analysis gebraucht" nicht reflektiert?

Aufgabe 4.3 und 4.4

(3) Falls es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $c \in [a_N, b_N]$, dann gilt $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \geqslant N$. ☐ *ja* ☒ *nein*

(4) Falls $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl ist, für die $a_n \leqslant c$ und $c \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. ☒ *ja* ☐ *nein*

- Schwierigkeiten beim „Lesen“ -> Raten?

Beispielaufgabe Stetigkeit

Aufgabe 3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 0$. Wir möchten beweisen, dass f in 0 stetig ist. Kann man dies aus den folgenden Aussagen folgern?

(1) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$ die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ gilt. ☐ *ja* ☐ *nein*

(2) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{n}$ die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ gilt. ☐ *ja* ☐ *nein*

(3) Es gilt $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 0$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = 0$. ☐ *ja* ☐ *nein*

(4) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ die Ungleichung $|f(x)| \leqslant x^2$ gilt. ☐ *ja* ☐ *nein*

kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Beispielaufgabe Stetigkeit

Aufgabe 3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 0$. Wir möchten beweisen, dass f in 0 stetig ist. Kann man dies aus den folgenden Aussagen folgern?

(1) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$ die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ gilt. ☒ *ja* ☐ *nein*

(2) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{n}$ die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ gilt. ☒ *ja* ☐ *nein*

(3) Es gilt $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 0$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = 0$. ☐ *ja* ☒ *nein*

(4) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ die Ungleichung $|f(x)| \leqslant x^2$ gilt. ☒ *ja* ☐ *nein*

Aufgabe3				
Item	(1)	(2)	(3)	(4)
% korrekt	81	44	46	17

Aufgabe 3.1 (19 % falsch)

(1) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$ die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ gilt. ☒ *ja* ☐ *nein*

- Spezialisierung der Definition für x = 0, f(x) = 0
- 19% falsch, ist das zu viel?

Aufgabe 3.2 (56 % falsch)

(2) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{n}$ die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ gilt. ☒ *ja* ☐ *nein*

Überlegung zur Lösung

- Verständnis, dass zu ε ein δ benötigt wird und δ := 1/*n* das Verlangte leistet

Hypothesen zur Erklärung von Schwierigkeiten

- Oberflächliche Antwort auf syntaktischer Ebene: Auswahl von "nein", weil ein kleines δ für die Stetigkeit erforderlich ist und nicht ein großes *n*
- Annahme, die Bedingung sei zwar notwendig, aber nicht hinreichend: "nur 1/n und nicht alle δ "

Förderlich für richtige Antwort

- Begriffliches Verständnis "*f*(*x*)-Umgebung erfordert *x*-Umgebung", das über die ε–δ–Formulierung hinausgeht
- Die Existenz von δ wird gefordert und δ = 1/*n* kann verwendet werden

Aufgabe 3.2 (56% falsch)

(2) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{n}$ die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ gilt. ☐ *ja* ☐ *nein*

Mögliche Maßnahmen

- syntaktische Variationen im Kurs können empfehlenswert sein, um die ε–δ -Formulierung als eine mögliche Formalisierung einer konzeptionellen Idee zu sehen
- erfordert eine bessere Ausbildung im sorgfältigen Lesen und in der begrifflichen Interpretation.

Aufgabe 3.3 (54 % falsch)

(3) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = 0$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = 0$. ☐ *ja* ☒ *nein*

Verbreiteter Fehlvorstellung (unterstützt auf Sekundarstufe): Für den Beweis einer Grenzwertaussage reicht es aus, es bei jeweils einer einzigen Folge von jeder Seite, zu prüfen

Oberflächliche Antwort auf syntaktischer Ebene für die richtige Wahl von "nein" ist möglich: die Bedingung sieht ganz anders aus als in der ε–δ-Formulierung

Hypothesen über LV- Ursachen

- In den Kursen wurde möglicherweise nicht die Äquivalenz von ε–δ-Formulierung und Folgenstetigkeit (für alle Folgen) diskutiert.
- Die Studierenden haben vielleicht noch nie ein Gegenbeispiel gesehen, bei dem (3) für eine unstetige Funktion gilt

kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Aufgabe 3.4 (83 % falsch)

(4) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ die Ungleichung $|f(x)| \leqslant x^2$ gilt. ☒ *ja* ☐ *nein*

Eine korrekte Argumentation/Denkweise kann beinhalten

- Squeeze-Theorem: f(x) wird zwischen x^2 und $-x^2$ eingeklemmt, beide gehen gegen 0
- ε–δ Kriterium: $|f(x)|$ ist durch die stetige Funktion x^2, beschränkt, die Verwendung des gleichen δ ist möglich
- Folgen: $|f(x_n)|$ ist durch $x_n{}^2$ beschränkt und geht deshalb gegen Null, wenn x_n gegen Null geht

Frage: Ist die schlechte Lösungsquote überhaupt problematisch, wird ein wichtiges Verständnis adressiert?

Aufgabe 3.4 (83 % falsch)

(4) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ die Ungleichung $|f(x)| \leqslant x^2$ gilt. ☒ *ja* ☐ *nein*

Hypothesen zur Erklärung von falschen Lösungen ("nein"):

- Oberflächliche syntaktische Antworten (die möglicherweise gefördert werden, weil eine komplexere Argumentation erforderlich ist):
  - Die Formulierung weicht stark von der Definition ab, was zu schnellen "Nein"-Antworten führt
  - Begründung: "Das Vorhandensein eines ε reicht nicht aus, weil die Stetigkeitsdefinition 'für alle ε' verlangt"
- Generell: Wenn keine „positive Evidenz“ vorliegt, wird „nein“ gewählt

khd m kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Ausblick

Auswertung des Tests

- Theoretisch geleitete Item-Analyse
- Genaue Analyse des Tests auf der Basis der Rasch-Skalierung
- Beschreibung von Kompetenzstufen

Weiterführende Projekte

- Dissertationsprojekt (Betreuung Thomas Bauer). Studierende lösen Testaufgaben mit lautem Denken ohne zeitliche Restriktionen
- Interviewstudie mit Lehrenden
- Zusammenhang mit Klausurergebnissen (U Marburg)
- Vergleichende Studie zu Effekten von PI (U Marburg und andere Unis aus Studie 2 als Vergleichsgruppe)
- Untersuchung von höheren Semestern (Ende BA, Anfang MA mit dem RACI-Test)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

biehler@math.upb.de

kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Literatur

Ableitinger, C. (2012). Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben: Kategorienbildung und Ankerbeispiele. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(1), 87-111.

Ableitinger, C., & Herrmann, A. (2011). Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra : Ein Arbeits- und Übungsbuch. Vieweg & Teubner.

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives (Complete ed.). Longman.

Bauer, T. (2019). *Verständnisaufgaben zur Analysis 1 und 2 für Lerngruppen, Selbststudium und Peer Instruction*. Springer Spektrum.

Bauer, T. (2019a). Peer Instruction als Instrument zur Aktivierung von Studierenden in mathematischen Übungsgruppen [journal article]. Mathematische Semesterberichte, 66(2), 219-241. https://doi.org/10.1007/s00591-018-0225-8

Bauer, T., Biehler, R., & Lankeit, E. (2022). Mini-Aufgaben in mathematischen Übungsgruppen zur Analysis: Charakteristika von Aufgaben und Abstimmungsverhalten von Studierenden. In R. Hochmuth, R. Biehler, M. Liebendörfer, & N. Schaper (Eds.), Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen - Konzepte, Praxisbeispiele und Untersuchungsergebnisse (pp. 515-543). https://doi.org/10.1007/978-3-662-64833-9_19

Bauer, T., Biehler, R., & Lankeit, E. (2023). ConcepTests in Undergraduate Real Analysis: Comparing Peer Discussion and Instructional Explanation Settings. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9, 426-460. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00167-y

Bauer, T., Biehler, R., Lankeit, E. (2024). Designing a concept inventory for real analysis. Erscheint in: INDRUM Proceedings 2024

Bauersfeld, H. (2000) Radikaler Konstruktivismus, Interaktionismus und Mathematikunterricht. In: Begemann, E. (Hrsg.) Lernen verstehen – Verstehen lernen (S. 117–144). Peter Lang

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011). Mathematik Neu Denken - Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Vieweg + Teuber Verlag.

Chi, M. T. (2009). Active-constructive-interactive: a conceptual framework for differentiating learning activities. Top Cogn Sci, 1(1), 73-105. https://doi.org/10.1111/j.1756-8765.2008.01005.x

Cline, K., Zullo, H., Duncan, J., Stewart, A., & Snipes, M. (2013). Creating discussions with classroom voting in linear algebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(8), 1131-1142. https://doi.org/10.1080/0020739x.2012.742152

Cortright, R. N., Collins, H. L., & DiCarlo, S. E. (2005). Peer instruction enhanced meaningful learning: Ability to solve novel problems. Advances in Physiology Education, 29(2), 107–111. https:// doi. org/10.1152/ advan.00060. 2004

Crouch, C. H., & Mazur, E. (2001). Peer instruction: Ten years of experience and results. American Journal of Physics, 69(9), 970–977. https:// doi. org/ 10. 1119/1. 13742 49

Feudel, F., & Unger, A. (2024). Development and implementation of Concept-Test questions in abstract algebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2297002

Literatur

Fonseca, B. A., & Chi, M. T. (2011). The self-explanation effect: A constructive learning activity. In R.E. Mayer, P.A. Alexander (Hrsg.) Handbook of research on learning and instruction, 1st ed. (S. 296-321). Routledge.

Hochmuth, R., Biehler, R., Liebendörfer, M., & Schaper, N. (2022). *Unterstützungsmaßnahmen in mathematikbezogenen Studiengängen - Konzepte, Praxisbeispiele und Untersuchungsergebnisse*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64833-9

Kay, R. H., & LeSage, A. (2009). Examining the benefits and challenges of using audience response systems: A review of the literature. Computers & Education, 53(3), 819–827. https:// doi. org/ 10.1016/j. compedu. 2009. 05. 001

Mazur, E. (1997). Peer Instruction: A User's Manual. Prentice Hall.

Miller, R. L., Santana-Vega, E., & Terrell, M. S. (2006). Can Good Questions and Peer Discussion Improve Calculus Instruction? PRIMUS, 16(3), 193-203. https://doi.org/10.1080/10511970608984146

Pilzer, S. (2001). Peer instruction in physics and mathematics. PRIMUS, 11(2), 185-192. https://doi.org/10.1080/10511970108965987

Porter, L., Bailey Lee, C., Simon, B., & Zingaro, D. (2011). Peer instruction: do students really learn from peer discussion in computing? In Proceedings of the seventh international workshop on Computing education research (pp. 45–52). ACM. https:// doi. org/ 10. 1145/ 20169 11. 20169 23

Rao, S. P., & DiCarlo, S. E. (2000). Peer instruction improves performance on quizzes. Advances in Physiology Education, 24(1), 51–55. https:// doi. org/ 10. 1152/ advan ces. 2000. 24.1. 51

Renkl, A. (2011). Aktives Lernen: Von sinnvollen und weniger sinnvollen theoretischen Perspektiven zu einem schillernden Konstrukt. Unterrichtswissenschaft, 39(3), 197-212.

Smith, M. K., Wood, W. B., Adams, W. K., Wieman, C., Knight, J. K., Guild, N., & Su, T. T. (2009). Why peer discussion improves student performance on in-class concept questions. Science, 323(5910), 122–124. https:// doi. org/ 10. 1126/ scien ce. 11659 19

Wentzel, K.R., Watkins, D.E. (2017): Instruction based on peer interactions. In: R.E. Mayer, P.A. Alexander (Hrsg.) Handbook of research on learning and instruction, 2nd ed.,(S. 365–387). Routledge