Vorname:
Name:
Pseudonym:
(Bitte in Druckbuchstaben angeben)

Probeklausur Mathematik für Wirtschaftsinformatik

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Hilfsmittel. Stift und Papier.

Hinweise:

- Jedes Lösungsblatt ist mit Namen, Vornamen zu versehen.
- Wenn Sie zustimmen, dass Ihr Ergebnis auf der Lehrstuhlwebseite unter einem Pseudonym veröffentlicht wird, geben Sie dieses Pseudonym bitte an. Ansonsten können Sie Ihre Note im Prüfungsamt erfragen.
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt anzufangen.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift.
- Eine Lösung wird nur gewertet, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist.
- Bei (versuchtem) Betrug gilt die Klausur als nicht bestanden.

---

(1) (a) Seien A und B Aussagen. Geben Sie die Definition der Aussagen $A \vee B$, $A \Leftrightarrow B$, $\neg A$ an.

(b) Untersuchen Sie mittels einer Wahrheitstabelle, ob für beliebige Aussagen A und B die Aussage

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (\neg A \Longrightarrow \neg B)$$

eine Tautologie ist.

(c) Geben Sie eine Formulierung der Aussage aus (b) in Worten.

(2) (a) Seien A und B Mengen. Geben Sie die Definition der Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

(b) Sei $A = 2\mathbb{N}$ und $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}$. Bestimmen Sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

(c) Definieren Sie den Begriff einer Relation auf einer Menge X.

(d) Definieren Sie den Begriff einer Äquivalenzrelation (inklusive aller darin vorkommenden Begriffe) auf einer Menge X.

(e) Sei X eine Menge und $F(X)$ die Menge der Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass durch

$$f \leq g \quad :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \quad x \in X,$$

eine Ordnungsrelation auf $F(X)$ definiert ist. Ist $F(X)$ mit dieser Ordnungsrelation im Allgemeinen total geordnet? (Begründung)

(e) Berechnen Sie $(15 \mod 42) + (37 \mod 42)$ und $(3 \mod 42) \cdot (30 \mod 42)$.

(3) (a) Definieren Sie den Begriff der Bijektivität einer Funktion.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Injektivität und Surjektivität. (Begründung):

$f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n^2$.

$g : \mathbb{Z}_k \to \mathbb{N}$, $n \mod k \mapsto \min\{m \in \mathbb{N} \mid m \in n \mod k\}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

$h : \{1, \ldots, 42\} \to \{1, \ldots, 42\}$, $n \mapsto \left(\frac{42}{42+(42 \cdot n - 42)}\right)^{-1}$

(c) Definieren Sie den Begriff einer unendlichen Menge.

(4) (a) Definieren Sie den Begriff einer abelschen Gruppe.

(b) Entscheiden und begründen Sie, ob es sich bei $\mathbb{Z}$ mit der Multiplikation um eine Halbgruppe, einen Monoid bzw. eine Gruppe handelt.

(c) Zeigen Sie, dass in einem Körper K

$$P = NP$$

für $N, P \in K$ genau dann gilt wenn $N = 1$ oder $P = 0$.

(5) (a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Summe der kleinsten n ungeraden Zahlen gleich n^2 ist. Das heißt, zeigen Sie die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

(6) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

(a) $(1+i) + (-1+i)$

(b) $(1+i) \cdot (42 - 42i)$

(c) $(1+i)^3$

(d) $(1-i)^2 \cdot (1+i)^2$

(7) (a) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & & & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ 10x_1 & +10x_2 & +6x_3 & +10x_4 & = & 0 \end{array}$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Produkte von Matrizen mit Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren eines Vektorraums V. Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$. Definieren Sie, wann $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis sind.

(d) Sei $A : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V und W. Definieren Sie den Begriff des Kerns und des Bildes von A.

(e) Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gebenen. Bestimmen Sie den Kern und das Bild von A.

Viel Erfolg!