Analysis auf Graphen

Wintersemester 2015/2016 **Prof. Dr. M. Keller**

Blatt 11 **Abgabe 27.01.2016**

Sei (b, c) ein Graph über $(X, \deg)$ mit

$$\deg(x) = \sum_{y \in X} b(x, y) + c(x).$$

Sei $P : \ell^2(X, \deg) \to \ell^2(X, \deg)$ ein Operator mit Matrix $p : X \times X \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$p(x, y) = \frac{b(x, y)}{\deg(x)}$$

d.h.

$$Pf(x) = \sum_{y \in X} p(x, y) f(y).$$

Sei weiterhin $p_n : X \times X \to [0, \infty)$ die Matrix der n-ten Potenz $P^n = P \circ \ldots \circ P$ des Operators P.

Sei μ_0 der größte Eigenwert von P.

(1) Zeigen Sie dass der der Eigenraum von μ_0 genau dann von einer strikt positiven Eigenfunktion φ_0 aufgespannt wird falls der Graph zusammenhängend ist.

(2) Zeigen Sie, dass für $\mu \in \mathbb{R}$ genau dann ein strikt positives u mit $(P - \mu)u \leq 0$ existiert falls $\mu \geq \mu_0$.

(3) Ein Graph b über X heißt bipartit falls $X_1, X_2 \subseteq X$ existieren mit $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ und $X_1 \cup X_2 = X$, so dass $b(X_j \times X_j) = \sum_{x,y \in X_j} b(x, y) = 0$, $j = 1, 2$. Sei $c = 0$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

   (i) b ist bipartit.

   (ii) $-\mu_0$ ist ein Eigenwert von P.

(4) Sei b ein zusammenhängender und nicht bipartiter Graph. Sei weiterhin φ eine strikt positive Eigenfunktion zu μ_0. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \mu_0^{-n} p_n(x, y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Zusatzaufgabe

(Z1) Sei Q ein linearer Operator auf $C(X)$ mit Matrix $q : X \times X \to [0, 1]$ mit $\sum_{y \in X} q(x, y) = \sum_{y \in X} q(y, x) = 1$ für alle $x \in X$. Zeigen, Sie ein Graph b über $(X, \deg)$ existiert mit $P = Q$.

(Z2) Was geschieht iin der Situation von Aufgabe (4) für einen bipartiten Graphen?