Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 2

6. Es sei E ein normierter Vektorraum und $d\colon E \times E \to [0, \infty)$ die von der Norm induzierte Metrik. Zeigen Sie, dass

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$$

für alle $x \in E$ und $r > 0$. Gilt diese Gleichheit auch in metrischen Räumen?

7. Wir betrachten erneut den Vektorraum $E := C[0, 1]$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit den Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ aus Aufgabe 5. Bestimmen Sie das Innere und den Abschluss der Menge

$$C_+[0, 1] := \{f \in C[0, 1] : f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [0, 1]\}$$

bzgl. $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$.

8. Auf der Grundmenge $X := [0, 1]$ betrachten wir die durch

$$\mathscr{T} := \{X \setminus F : F \subseteq X \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

definierte Topologie. Untersuchen Sie, welche der folgenden Behauptungen wahr sind:

(i) $(X, \mathscr{T})$ ist ein Hausdorffraum.

(ii) Die Topologie $\mathscr{T}$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.

(iii) Die Topologie $\mathscr{T}$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(iv) Der Raum $(X, \mathscr{T})$ ist separabel.

(v) Für jede Menge $Y \subseteq X$ und jeden Punkt $y \in \overline{Y}$ gibt es eine Folge $(y_n) \subseteq Y$ mit $\lim y_n = y$.

In Bezug auf den Wahrheitswert welcher der Aussagen (i)–(v) unterscheidet sich $\mathscr{T}$ von der $O \setminus C$-Topologie aus der Vorlesung?

9. Wir betrachten den Raum $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Prüfen Sie zunächst, dass ein Netz $(f_i)_{i \in I} \subseteq \mathscr{F}(\mathbb{R})$ genau dann gegen ein $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ konvergiert, wenn $\lim_I f_i(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie außerdem das Innere und den Abschluss der Menge $C(\mathbb{R}) := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}) : f \text{ ist stetig}\}$ in $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.