Universität Potsdam

Besprechung der Lösungen:
Donnerstag, 27.04.17, 8:15 Uhr

Dr. M. Gerlach
Sommersemester 2017

Übungen Topologische (Vektor-)Räume

Blatt 1

1. Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X, d) jede *offene Kugel* $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ (in der erzeugten Topologie) offen ist und dass jede *abgeschlossene Kugel*

$$\{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

abgeschlossen ist. Gibt es auch eine Metrik auf $\mathbb{R}^d$, in der jede offene Kugel abgeschlossen ist und jede abgeschlossene Kugel offen?

2. Zeigen Sie, dass

$$d_a(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert und diese die euklidische Topologie erzeugt. Warum stammt d_a nicht von einer Norm?

3. Zeichnen Sie die Einheitskugeln $B(0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$.

4. Zwei Metriken d_1 und d_2 auf einer Menge X heißen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Topologie erzeugen. Zeigen Sie: Wenn es eine Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gibt, so dass

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \tag{1}$$

für alle $x, y \in X$, so sind die Metriken äquivalent. Entscheiden Sie, ob auch die Umkehrung gilt, d.h. ob äquivalente Metriken Eigenschaft (1) erfüllen.

5. Es bezeichne $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_\infty$ die von den Normen

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

auf dem Vektorraum $C[0, 1]$ der $\mathbb{K}$-wertigen stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ erzeugten Topologien. Welche der beiden Topologien ist feiner? Sind die Topologien gleich?