Einführung in die Differentialgeometrie

Institut für Mathematik, Universität Potsdam

Wintersemester 2021/22

Mehran Seyedhosseini

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die Grundlagen

1.1 Punktmengetopologie

1.1.1 Erste Definitionen und Beispiele

Definition 1.1.1. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* τ auf X ist eine Familie von Teilmengen von X mit den Eigenschaften

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. beliebige Vereinigungen von Mengen aus τ sind wieder in τ; d.h. falls $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \tau$ für eine beliebige Indexenge Λ, dann $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \tau$ und
3. endliche Schnitte von Mengen aus τ sind in τ; d.h. falls $\{U_1, \cdots, U_n\} \subset \tau$ für $n \in \mathbb{N}$, dann $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i \in \tau$.

Definition 1.1.2. Ein Paar (X, τ), wobei X eine Menge und τ eine Topologie auf X ist, heißt ein *topologischer Raum*.

Bemerkung 1.1.3. Wir schreiben oft „sei X ein topologischer Raum." Damit meinen wir, dass X eine Menge ist und dass wir eine bestimmte Topologie auf X gewählt haben.

Beispiel 1.1.4.

1. Sei X eine Menge. Die Topologie $\tau_{disk} \coloneqq \mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge von X) heißt die diskrete Topologie auf X.
2. Sei X eine Menge. Die Topologie $\tau_{grob} \coloneqq \{\emptyset, X\}$ heißt die grobe Topologie auf X. In der Literatur heißt diese Topologie häufiger die *triviale* Topologie.
3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $p \in X$ bezeichnen wir mit $B_r(p)$ den offenen r-Ball um p. Die Familie
$$\tau_d \coloneqq \{U \subset X \quad | \quad \forall p \in U, \exists \epsilon > 0 \colon B_\epsilon(p) \subset U\}$$
ist eine Topologie auf X. Wir nennen sie die Topologie induziert durch die Metrik d.
4. Die „Standardtopologie" auf $\mathbb{R}^n$ ist die Topologie induziert durch die euklidische Metrik.

Definition 1.1.5. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

- Falls $U \in \tau$, dann heißt U *offen*.
- Falls $A \subset X$ und $(X \setminus A) \in \tau$, dann heißt A *abgeschlossen*.
- Sei $S \subset X$. Das *Innere* von S ist die Vereinigung aller offenen Mengen von X, die in S enthalten sind. Es wird mit S° bezeichnet.
- Sei $S \subset X$. Der *Abschluss* von S ist der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen von X, die S enthalten. Er wird mit $\overline{S}$ bezeichnet.

Bemerkung 1.1.6.

- Das Innere von S ist, als Vereinigung offener Mengen, offen. Damit ist S° die größte offene Menge, die in S enthalten ist.
- Der Abschluss von S ist, als Schnitt abgeschlossener Mengen, abgeschlossen. Damit ist $\overline{S}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die S enthält.

Definition 1.1.7. Sei X ein topologischer Raum und sei $p \in X$. Eine Teilmenge $S \subset X$ heißt eine

- *Umgebung* von p, falls eine offene Menge U mit $p \in U \subset S$ existiert.
- *offene Umgebung* von p, falls sie offen und eine Umgebung von p ist; d. h. eine offene Umgebung von p ist eine offene Menge, die p enthält.

Das folgende „lokale“ Kriterium für Offenheit ist nützlich.

Proposition 1.1.8. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen genau dann, wenn für alle $p \in U$ eine offene Umgebung U_p von p existiert, die in U enthalten ist.*

Beweis. Sei U offen. Dann setzen wir $U_p := U$. Das beweist eine Richtung. Sei nun U so, dass für alle $p \in U$, eine offene Umgebung U_p von p existiert die in U enthalten ist. Dann gilt $U = \bigcup_{p \in U} U_p$. Das heißt, U ist eine Vereinigung offener Mengen und damit offen. $\square$

Definition 1.1.9. Seien X and Y topologische Räume. Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ heißt *stetig*, falls für alle $U \subset Y$ offen $F^{-1}(U) \subset X$ offen ist; d.h. Urbilder offener Mengen sind offen.

Aufgabe 1.1.10. Seien X und Y topologische Räume und sei $F\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie

1. F is stetig genau dann, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.
2. F ist stetig genau dann, wenn für alle $p \in X$ und eine beliebige offenen Umgebung U von $F(p)$ eine offene Umgebung V von p mit $F(V) \subset U$ existiert.
3. Nun setzen wir voraus, dass die Topologien auf X und Y durch Metriken d_X und d_Y auf X bzw. Y induziert sind. Zeigen Sie, F ist stetig genau dann wenn das ϵ-δ-Kriterium erfüllt ist.

Beispiel 1.1.11.

- Sei X eine Menge, die mit der diskreten Topologie versehen ist. Sei Y ein beliebiger topologischer Raum. Dann ist jede Abbildung $F\colon X \to Y$ stetig.

- Sei Y eine Menge, die mit der groben (trivialen) Topologie versehen ist. Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Dann ist jede Abbildung $F\colon X \to Y$ stetig.

Definition 1.1.12. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $F\colon X \to Y$ heißt

- *offen*, falls für alle offene Teilmengen $U \subset X$ $F(U) \subset Y$ offen ist.
- *abgeschlossen*, falls für alle abgeschlossenen Teilmengen $U \subset X$ $F(U) \subset Y$ abgeschlossen ist.
- ein *Homöomorphismus*, falls F bijektiv ist und F und F^{-1} stetig sind.

Aufgabe 1.1.13.

- Eine stetige und bijektive Abbildung $F\colon X \to Y$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn F offen ist.
- Eine stetige und bijektive Abbildung $F\colon X \to Y$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn F abgeschlossen ist.

Beispiel 1.1.14.

- Wir bezeichnen mit τ_{grob} bzw. τ_{st} die grobe bzw. die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}^n, \tau_{st}) \to (\mathbb{R}^n, \tau_{grob})$ ist stetig und bijektiv, aber nicht offen.
- Verkettung stetiger Abbildungen ist stetig.

1.1.2 Neue Topologische Räume aus alten

Teilraumtopologie

Proposition 1.1.15. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sei $Y \subset X$. Wir setzen*

$$\tau|_Y = \{\widetilde{U} \subset Y : \exists U \subset X \text{ offen mit } \widetilde{U} = U \cap Y\}.$$

Dann ist die Familie $\tau|_Y$ eine Topologie auf Y.

Beweis.

- Da $\emptyset = \emptyset \cap Y$ und $Y = X \cap Y$, gilt $\emptyset, Y \in \tau|_Y$.
- Sei $\{\widetilde{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \tau|_Y$ mit Λ einer beliebigen Indexmenge. Für jedes $\alpha \in \Lambda$ finden wir $U_\alpha \subset X$ offen, sodass $\widetilde{U}_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Es gilt

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \widetilde{U}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha) \cap Y,$$

  was impliziert, dass $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \widetilde{U}_\alpha \in \tau|_Y$ (da $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \subset X$ offen ist).
- In ähnlicher Weise zeigt man, dass endliche Schnitte Elemente aus $\tau|_Y$ wieder in $\tau|_Y$ sind.

$\square$

Definition 1.1.16. Sei $(X, \tau), Y$ und $\tau|_Y$ wie in Proposition 1.1.15. Die Topologie $\tau|_Y$ heißt die *Teilraumtopologie* auf Y.

Beispiel 1.1.17.

- Betrachte $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit der Standardtopologie. Eine Menge $\widetilde{U} \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ ist offen in der Teilraumtopologie genau dann, wenn

$$\forall (x, 0) \in \widetilde{U}, \exists \epsilon > 0 : (y, 0) \in \widetilde{U} \textit{ falls } |y - x| < \epsilon.$$

  Insbesondere ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\} \qquad x \mapsto (x, 0)$$

  ein Homöomorphismus, falls $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie und $\mathbb{R} \times \{0\}$ mit der Teilraumtopologie versehen wird. Anders gesagt stimmt, bis auf die kanonische Identifikation $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\}$, die Teilraumtopologie von $\mathbb{R} \times \{0\}$ mit der Standardtopologie von $\mathbb{R}$ überein.

- Wir bezeichnen mit $S^n(R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Sphäre mit Radius R; d.h. die Menge aller Punkte von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit euklidischer Norm R. Wir versehen $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Standardtopologie. Die Standardtopologie von $S^n(R)$ ist die Teilraumtopologie auf $S^n(R)$.

Beispiel 1.1.18. Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Die Menge $(0, 1]$ ist eine offene Teilmenge von $[-2, 1]$, wenn wir $[-2, 1]$ mit der Teilraumtopologie versehen. In der Tat, es gilt $(0, 1] = (0, 2) \cap [-2, 1]$. Die Menge $(0, 1]$ ist aber offensichtlich keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1.1.19. Sei X ein topologischer Raum. Sei $Y \subset X$ offen. Falls eine Menge $U \subset Y$ in der Teilraumtopologie auf Y offen ist, dann ist sie auch in X offen.

Proposition 1.1.20. *Sei X ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$. Wir bezeichnen mit ι die Inklusionsabbildung $Y \subset X$ und versehen Y mit der Teilraumtopologie.*

1. *ι ist stetig.*
2. *Sei W ein weiterer topologischer Raum. Die Einschränkung einer stetigen Abbildung $F : X \to W$ auf Y ist stetig.*
3. *Sei Z ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $G : Z \to Y$ ist genau dann stetig, falls $\iota \circ G : Z \to X$ stetig ist.*

Beweis.

1. Sei $U \subset X$ offen. Es gilt $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$, welche nach Definition von Teilraumtopologie offen (in Y) ist.
2. Die Einschränkung ist genau die Verkettung $F \circ \iota$ und als Verkettung stetiger Abbildungen stetig.
3. Sei G stetig. Dann ist $\iota \circ G$ eine Verkettung stetiger Abbildungen und damit stetig. Sei nun umgekehrt $\iota \circ G$ stetig. Sei U eine offene Teilmenge von Y (in der Teilraumtopologie). Nach Definition existiert eine offene Teilmenge $\widetilde{U}$ von X, sodass $U = \widetilde{U} \cap Y$. Dann gilt $G^{-1}(U) = (\iota \circ G)^{-1}(\widetilde{U})$. Daraus folgt, dass die Menge $G^{-1}(U)$ offen ist, da sie das Urbild der offenen Menge $\widetilde{U}$ unter der stetigen Abbildung $\iota \circ G$ ist. □

Definition 1.1.21. Seien X und Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $\iota \colon Y \to X$ heißt eine *topologische Einbettung*, falls sie injektiv ist und die Abbildung

$$Y \to F(Y) \qquad y \mapsto F(y)$$

ein Homöomorphismus ist. Hier versehen wir $F(Y)$ mit der Teilraumtopologie.

Beispiel 1.1.22.

- Sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Sei $\iota \colon Y \to X$ die Inklusion. Wir versehen Y mit der Teilraumtopologie. Dann ist ι eine topologische Einbettung.
- Die Abbildung
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto (x, 0)$$
ist eine topologische Einbettung

Aufgabe 1.1.23. Zeigen Sie, dass de Abbildung

$$(-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (\sin(t), \sin(2t))$$

injektiv und stetig, aber keine topologische Einbettung ist.

Quotiententopologie

Proposition 1.1.24. *Sei X ein topologischer Raum. Sei Y eine Menge und $F \colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Die Familie*

$$\tau_F \coloneqq \{U \subset Y : F^{-1}(U) \subset X \text{ ist offen}\}$$

ist eine Topologie auf Y.

Beweis. Der Beweis wird als eine Aufgabe den Student*innen überlassen. □

Definition 1.1.25. Seien X, Y, F und τ_F wie oben. Die Topologie τ_F heißt die *Quotiententopologie* auf Y (induziert durch F).

Häufig benutzen wir die obige Konstruktion, um eine Topologie auf die Menge der Äquivalenzklassen eines topologischen Raums bezüglich einer Äquivalenzrelation zu definieren. Sei X ein topologischer Raum und sei R eine Äquivalenzrelation auf X. Wir bezeichnen mit X/R die Menge der Äquivalenzklassen von X bezüglich der Relation R. Dann haben wir eine kanonische Abbildung

$$X \to X/R \qquad x \mapsto [x],$$

wobei wir mit $[x]$ die Äquivalenzklassen von $x \in X$ bezeichnen. Wir können nun X/R mit der Quotiententopologie induziert durch die obere Abbildung versehen.

Beispiel 1.1.26.

1. Betrachte die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ gegeben durch $x \sim x + k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Der Raum $\mathbb{R}/\sim$ versehen mit der Teilraumtopologie ist homöomorph zu S^1.
2. Betrachte die Äquivalenzrelation auf $[0, 1]$ gegeben durch $0 \sim 1$ und $x \sim x$ für alle $x \in (0, 1)$. $[0, 1]/\sim$ ist homöomorph zu dem Quotientenraum aus dem vorherigen Beispiel.

3. Betrachte $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ versehen mit der Teilraumtopologie. Betrachte die Äquivalenzrelation auf X gegeben durch

$$(0,x) \sim (1,x) \quad , \quad (x,0) \sim (x,1)$$

und $(x,y) \sim (x,y)$ für alle $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$. Wir werden sehen, dass $X/\sim$ versehen mit der Quotiententopolgoe homöomorph zum zwei-dimensionalen Torus (Oberfläche des Donuts) ist.

4. Sei $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Betrachte die Äquivalenzrelation auf X gegeben durch $x \sim \lambda x$ für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Äquivalenzklassen sind dann genau die eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^{n+1}$ jeweils ohne den Ursprung. $X/\sim$ wird normalerweise mit $\mathbb{RP}^n$ bezeichnet und heißt *der n-dimensionale projektive Raum*. Wir werden $\mathbb{RP}^n$ versehen mit der Quotiententopologie später untersuchen.

Proposition 1.1.27. *Sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $F\colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Wir versehen Y mit der Quotiententopologie. Dann gilt:*

1. *F ist stetig.*

2. *Eine Abbildung $G\colon Y \to Z$ von Y in einen weiteren topologischen Raum Z ist stetig genau dann, wenn $G \circ F$ stetig ist.*

Beweis.

1. Die Aussage folgt sofort aus der Definition der Quotiententopologie.

2. Falls G stetig ist, dann ist $G \circ F$ als Verkettung stetiger Abbildungen wieder stetig. Sei nun umgekehrt $G \circ F$ stetig. Sei $U \subset Z$ offen. Dann gilt $F^{-1}(G^{-1}(U)) = (G \circ F)^{-1}(U)$. Die Menge auf der rechten Seite ist nach Annahme offen. Aus der Definition der Quotiententopologie folgt dann, dass $G^{-1}(U)$ offen ist. Die Behauptung folgt. □

Aufgabe 1.1.28.

- Zeigen Sie, dass die Räume der Äquivalenzklassen aus dem Beispiel 1 und Beispiel 2 von Beispiel 1.1.26 zueinander homöomorph sind.

- Finden sie eine stetige Bijektion vom Raum der Äquivalenzklassen in Beispiel 2 von Beispiel 1.1.26 nach S^1.

Definition 1.1.29. Seien X und Y topologische Räume. Eine stetige surjektive Abbildung $F\colon X \to Y$ heißt *Quotientenabbildung*, falls die Topologie auf Y mit der Quotiententopologie auf Y induziert durch F übereinstimmt.

Aufgabe 1.1.30.

1. Seien X und Y topologische Räume. Sei $F\colon X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

   (i) F ist eine Quotientenabbildung.

   (ii) Eine Abbildung $G\colon Y \to Z$ von Y in einen weiteren topologischen Raum Z ist stetig genau dann, wenn $G \circ F$ stetig ist.

2. Finden Sie topologische Räume X und Y und eine stetige surjektive Abbildung $F \colon X \to Y$, die keine Quotientenabbildung ist.

Ein wichtiger Spezialfall dieser Konstruktion ergibt sich, wenn $F \colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung von einem topologischen Raum X in eine Menge Y ist. Die Quotiententopologie auf Y ist die Topologie, die wir erhalten, indem wir die offenen Mengen von X mittels F nach Y transportieren.

Beispiel 1.1.31. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Nach Wahl einer (geordneten) Basis $\mathcal{B} \subset V$ von V bekommen wir einen Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}} \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} V$ (indem wir die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{B}$ abbilden.). Wir können die Standardtopologie von $\mathbb{R}^n$ mittels $\Phi_{\mathcal{B}}$ nach V transportieren. Die resultierende Topolgie auf V ist unabhängig von Wahl der Basis: Sei $\mathcal{C}$ eine weitere Basis und $\Phi_{\mathcal{C}} \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} V$ der entsprechende Isomorphismus. Wir bezeichnen die Topologie, die durch $\Phi_{\mathcal{B}}$ bzw. $\Phi_{\mathcal{C}}$ induziert wird mit $\tau_{\mathcal{B}}$ bzw. $\tau_{\mathcal{C}}$. Sei $U \subset V$. Es gilt

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{-1}(U) = (\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}})(\Phi_{\mathcal{B}})^{-1}(U).$$

Da $\Phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv und damit ein Homöomorphismus ist, ist $\Phi_{\mathcal{C}}^{-1}(U)$ genau dann offen, wenn $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(U)$ offen ist. Daher gilt $\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{C}}$.

Topologische Summe

Seien $\{X_\nu\}_{\nu \in \Lambda}$ topologische Räume. Hier ist Λ eine nicht notwendigerweise endliche Indexmenge. Wir bezeichnen mit $X := \sqcup_{\nu \in \Lambda} X_\nu$ die disjunkte Vereinigung der Mengen X. Die Familie

$$\tau = \{U \subset X | U \cap X_\nu \text{ ist offen } \forall \nu \in \Lambda\}$$

definiert eine Topologie auf X.

Definition 1.1.32. Seien $\{X_\nu\}_{\nu \in \Lambda}$, X und τ wie oben. Der topologischer Raum (X, τ) heißt die *topologische Summe* der Familie $\{X_\nu\}_{\nu \in \Lambda}$.

Bemerkung 1.1.33. Seien $\{X_\nu\}_{\nu \in \Lambda}$, X und τ wie oben. Da

$$X_\nu \cap X_\mu = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \nu \neq \mu \\ X_\nu & \text{falls } \nu = \mu \end{cases}$$

sind die Mengen X_ν in der topologische Summe offen.

Proposition 1.1.34. *Sei X die topologische Summe einer Familie $\{X_\nu\}_{\nu \in \Lambda}$ von topologischen Räumen. Wir bezeichnen mit $\iota_\nu \colon X_\nu \to X$ die Inklusionsabbildung.*

1. *Die Abbildungen ι_ν sind stetig.*

2. *Sei Z ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $F \colon X \to Z$ ist genau dann stetig, wenn $F \circ \iota_\nu$ für alle $\nu \in \Lambda$ stetig ist.*

Beweis.

1. Sei $U \subset X$ offen. Es gilt $\iota_\nu^{-1}(U) = U \cap X_\nu$, welche nach Definition der topologischen Summe offen ist.

2. Falls F stetig ist, dann ist $F \circ \iota_\nu$, als eine Verkettung von stetigen Abbildungen, auch stetig. Seien nun die Abbildungen $F \circ \iota_\nu$ für alle ν stetig. Sei $V \subset Z$ offen. Dann ist $F^{-1}(V) = \bigcup_{\nu \in \Lambda} (F \circ \iota_\nu)^{-1}(V)$, als Vereinigung offener Mengen offen.

□

Sei X ein topologischer Raum. Wir bezeichnen mit σ die Topologie auf X. Sei $\{X_\nu\}_{\nu\in\Lambda}$ eine disjunkte Familie von Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{\nu\in\Lambda} X_\nu$. Jedes X_ν, versehen mit der Teilraumtopologie, ist ein topologischer Raum. Sei τ nun die Topologie auf X, sodass (X,τ) die topologische Summe der Familie $\{X_\nu\}_{\nu\in\Lambda}$ ist. Wie hängen σ und τ zusammen? Falls $U \subset X$ offen ist, ist, nach der Definition der Teilraumtopologie, $U \cap X_\nu$ in (der Teilraumtopologie von) X_ν offen. Daher gilt immer $\sigma \subset \tau$.

Proposition 1.1.35. *In der obigen Situation gilt $\tau = \sigma$ genau dann, wenn die Mengen X_ν (in X) offen sind (also $X_\nu \in \sigma$).*

Beweis. Seien die Mengen X_ν alle offen (also $X_\nu \in \sigma$). Sei $U \in \tau$. Nach Definition gilt dann, dass $U \cap X_\nu$ in der Teilraumtopologie von X_ν offen ist. Wegen Aufgabe 1.1.19 ist dann $U \cap X_\nu \in \sigma$. Weiterhin gilt $U = \bigcup_{\nu\in\Lambda} U \cap X_\nu$. Daraus folgt, dass $U \in \sigma$.

Sei nun umgekehrt $\tau = \sigma$. Aus $X_\nu \in \tau$ (siehe Bemerkung 1.1.33) folgt $X_\nu \in \sigma$. Die Behauptung folgt. □

1.1.3 Basen von topologischen Räumen

Definition 1.1.36. Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{B} \subset \tau$ heißt eine *Basis* für τ, falls für alle $U \in \tau$ und für alle $p \in U$ ein $V \in \mathcal{B}$ mit $p \in V \subset U$ existiert.

Beispiel 1.1.37.

1. Betrachte $\mathbb{R}^n$. Die Familie

$$\mathcal{B} \coloneqq \{B_r(x) | x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}\}$$

ist eine Basis für die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

2. Sei X ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$. Sei weiterhin $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie auf X. Dann ist

$$\mathcal{B}_{Y\subset X} \coloneqq \{V \cap Y | V \in \mathcal{B}\}$$

eine Basis für die Teilraumtopologie auf Y.

3. Seien X und Y topologische Räume und sei $F\colon X \to Y$ eine stetige, offene und surjektive Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie auf X. Dann ist

$$\mathcal{B}_F \coloneqq \{F(V) | V \in \mathcal{B}\}$$

eine Basis für die Topologie auf Y.

Aufgabe 1.1.38. Beweisen Sie die Aussagen in Beispiel 1.1.37.

Proposition 1.1.39. *Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Eine Familie $\mathcal{B} \subset \tau$ ist eine Basis für die Topologie auf X $\iff$ jede offene Menge von X ist eine Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für τ. Sei $U \subset X$ offen. Nach Definition einer Basis gibt es für jedes $p \in U$, $V_p \in \mathcal{B}$ mit $p \in V_p \subset U$. Es ist dann klar, dass $U = \bigcup_{p\in U} V_p$.

$\Longleftarrow$: Sei U offen. Nach Voraussetzung existiert $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{B}$, sodass $U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$. Sei $p \in U$. Dann existiert $\alpha_p \in \Lambda$ mit $p \in V_{\alpha_p}$. Die Behauptung folgt. □

Die folgende Frage ist natürlich und ihre Antwort wird später nützlich sein. Sei X eine Menge und sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Wann ist $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie auf X. Wegen Proposition 1.1.39 gibt es höchstens eine Topologie, für die $\mathcal{B}$ eine Basis sein kann (warum?).

Aufgabe 1.1.40. Sei X eine Menge und sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{B}$ die Basis einer Topologie auf X genau dann, wenn

1. $X = \bigcup_{V \in B} V$ und
2. für alle $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ und für alle $p \in V_1 \cap V_2$ existiert $V \in \mathcal{B}$ mit $p \in V \subset V_1 \cap V_2$.

Beispiel 1.1.41 (Produkttopologie)**.** Seien (X_1, τ_1) und (X_2, τ_2) topologische Räume. Die Familie

$$\mathcal{B}_{X_1 \times X_2} := \{V \times W | V \in \tau_1, W \in \tau_2\}$$

erfüllt die Voraussetzungen 1 und 2 aus Aufgabe 1.1.40. Die Topologie auf $X_1 \times X_2$, die dadurch erzeugt wird, heißt die *Produkttopologie*. Die Projektionen

$$\pi_i \colon X_1 \times X_2 \to X_i \qquad (x_1, x_2) \mapsto x_i$$

sind dann offensichtlich stetig (wenn $X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie versehen wird.)

Aufgabe 1.1.42. Seien X_1, X_2, Y_1 und Y_2 topologische Räume. Wir versehen im Folgenden $X_1 \times X_2$ und $Y_1 \times Y_2$ mit der Produkttopologie.

1. Wir bezeichnen mit $\pi_i \colon X_1 \times X_2 \to X_i$ die kanonischen Projektionen (siehe Beispiel 1.1.41). Sei Z ein weiterer topologischer Raum. Beweisen Sie, dass eine Abbildung $F \colon Z \to X_1 \times X_2$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen $\pi_1 \circ F$ und $\pi_2 \circ F$ stetig sind.
2. Seien $F_1 \colon X_1 \to Y_1$ und $F_2 \colon X_2 \to Y_2$ Abbildungen. Beweisen Sie, dass
$$F_1 \times F_2 \colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2 \qquad (x_1, x_2) \mapsto (F_1(x_1), F_2(x_2))$$
genau dann stetig ist, wenn F_1 und F_2 stetig sind.

Definition 1.1.43. Ein topologischer Raum heißt *zweitabzählbar*, falls er eine abzählbare Basis besitzt.

Beispiel 1.1.44.

1. $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Standardtopologie ist zweitabzählbar.
2. Teilmengen von zweitabzählbaren topologischen Räumen sind zweitabzählbar (wenn sie mit der Teilraumtopologie versehen werden).
3. Seien X und Y topologische Räume und sei $F \colon X \to Y$ eine stetige, offene und surjektive Abbildung. Falls X zweitabzählbar ist, dann ist Y auch zweitabzählbar.

Definition 1.1.45. Sei X ein topologischer Raum.

- Eine *Umgebungsbasis* an $p \in X$ ist eine Familie $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ von Umgebungen von p, sodass für eine beliebige Umgebung V von p ein $\alpha_0 \in \Lambda$ existiert mit $B_{\alpha_0} \subset V$.
- X heißt *erstabzählbar*, wenn an jedem Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis existiert.

Bemerkung 1.1.46. Offensichtlich impliziert Zweitabzählbarkeit Erstabzählbarkeit.

Beispiel 1.1.47. Sei X eine überabzählbare Menge versehen mit der diskreten Topologie. Dann ist X erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.

1.1.4 Hausdorffeigenschaft

Definition 1.1.48. Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorff*, falls für je zwei Punkte $p, q \in X$ mit $p \neq q$ disjunkte offene Umgebungen U_p und U_q von p bzw. q (also $U_p \cap U_q = \emptyset$) existieren.

Beispiel 1.1.49.

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist X, versehen mit der Topologie induziert durch die Metrik, Hausdorff. In der Tat: Falls $p, q \in X$ mit $p \neq q$, dann sind die metrische Bälle mit Radius $\frac{d(p,q)}{3}$ rund um p und q disjunkte offene Umgebungen von p bzw. q.

2. Wegen 1 ist $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Standardtopologie, Hausdorff.

3. Sei X eine Menge mit mehr als einem Punkt. Dann ist X, versehen mit der groben Topologie, nicht Hausdorff.

Aufgabe 1.1.50.

1. Zeigen Sie, dass Teilmengen von Hausdorffräumen Hausdorff sind (wenn sie mit der Teilraumtopologie versehen werden).

2. Beweisen Sie, dass Produkte von Hausdorffräumen Hausdorff sind (wenn sie mit der Produkttopologie versehen werden).

3. Beweisen Sie, dass $\mathbb{RP}^n$ Hausdorff ist.

4. Finden Sie einen topologischen Hausdorffraum X, eine Menge Y und eine surjektive Abbildung $F\colon X \to Y$, sodass Y, versehen mit der Quotiententopologie, nicht Hausdorff ist.

Proposition 1.1.51. *Sei X ein Hausdorffraum. Sei $p \in X$. Die Menge $\{p\} \subset X$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $q \in X \setminus \{p\}$. Dann existieren disjunkte offene Umgebungen U_p und U_q von p bzw. q. Damit gilt $U_q \subset X \setminus \{p\}$. Das zeigt aber, dass $X \setminus \{p\}$ offen ist. Die Behauptung folgt. □

1.1.5 Kompaktheit

Definition 1.1.52. Sei X ein topologischer Raum. Sei $S \subset X$.

Eine Familie $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine *Überdeckung von S in X*, falls $S \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. In diesem Fall, heißt eine Teilfamilie $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ mit $I \subset \Lambda$ und $S \subset \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ eine *Teilüberdeckung*. Eine Überdeckung von S in X heißt eine *offene Überdeckung von S in X*, falls die Elemente der Familie offen sind. Eine Überdeckung von S in X, die endlich viele Elemente enthält, heißt eine *endliche Überdeckung*.

Bemerkung 1.1.53. Falls $S = X$ in der Situation von Definition 1.1.52 gilt, sagen wir „Überdeckung von X“ statt „Überdeckung von X in X“. Ähnlich vereinfachen wir die Terminologie für offene und Teilüberdeckung.

Definition 1.1.54. Sei X ein topologischer Raum. X heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat.

Beispiel 1.1.55.

1. Alle endlichen Mengen, versehen mit einer beliebigen Topologie, sind kompakt.

2. Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Teilraumtopologie, sind genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen sind.

3. (Endliche) Produkte kompakter Räume sind kompakt. Wir haben unendliche Produkte von topologischen Räumen nicht diskutiert. Unendliche Produkte kompakter Räume sind auch kompakt (Satz von Tychonoff).

Das folgende Kriterium ist hilfreich um die Kompaktheit von Teilmengen eines topologischen Raums, versehen mit der Teilraumtopologie, zu überprüfen.

Proposition 1.1.56. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $Y \subset X$, versehen mit der Teilraumtopologie, ist kompakt $\iff$ jede offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ von Y in X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.*

Beweis. Aufgabe. □

Proposition 1.1.57. *Sei X ein kompakter topologischer Raum. Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist A (versehen mit der Teilraumtopologie) kompakt.*

Beweis. Wir benutzen Proposition 1.1.56. Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von A in X. Dann ist $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existieren $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, sodass $X = (\bigcup_{1\le i\le n} U_{\alpha_i}) \cup (X \setminus A)$. Daraus folgt, $A \subset \bigcup_{1\le i\le n} U_{\alpha_i}$. Die Behauptung folgt mit Hilfe der Proposition 1.1.56. □

Proposition 1.1.58. *Sei X ein Hausdorffraum. Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen, dass $X \setminus K$ offen ist. Dafür zeigen wir, dass für jedes $x \in X \setminus K$ eine offene Umgebung U_x von x mit $U_x \cap K = \emptyset$ existiert.

Sei $x \in X \setminus K$ beliebig. Da X Hausdorff ist, existieren für jedes $y \in K$ offene Umgebungen V_y und U_y von y bzw. x mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Wir haben $K \subset \bigcup_{y\in K} V_y$. Da K kompakt ist, existieren $y_1, \cdots, y_n$, sodass $K \subset \bigcup_{1\le i\le n} V_{y_i}$. Wir setzen $U_x = \bigcap_{1\le i\le n} U_{y_i}$. Dann ist U_x eine offene Umgebung von X und es gilt

$$U_x \cap K \subset U_x \cap \bigcup_{1\le i\le n} V_{y_i} = \bigcup_{1\le i\le n} U_x \cap V_{y_i} = \emptyset.$$

Die Behauptung folgt. □

Aufgabe 1.1.59.

1. Seien X und Y topologische Räume und sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist $F(K)$ auch kompakt.

2. Sei X ein kompakter Raum und sei Y ein Hausdorffraum. Sei $F\colon X \to Y$ eine stetige bijektive Abbildung. Dann ist F ein Homöomorphismus.

Definition 1.1.60. Ein topologischer Raum X heißt *lokalkompakt*, falls jeder Punkt $p \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Bemerkung 1.1.61. Alle topologischen Räume, die uns (als topologischer Raum) interessieren, sind lokalkompakt. Einfache Beispiele für nicht lokalkompakte Räume sind unendlich-dimensionale Hilberträume.

Die folgende Proposition ist der Hauptgrund, weswegen wir den Begriff der Lokalkompaktheit eingeführt haben.

Proposition 1.1.62. *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann gibt es eine Basis für die Topologie auf X, die aus Mengen mit kompaktem Abschluss besteht.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis. Wir definieren

$$\mathcal{C} = \{V \in \mathcal{B} | \overline{V} \text{ ist kompakt } \}.$$

Nach Definition besteht $\mathcal{C}$ aus Mengen mit kompaktem Abschluss. Wir behaupten, dass sie eine Basis für die Topologie auf X ist. In der Tat: Sei $p \in X$ und sei U eine offene Umgebung von p. Wir müssen zeigen, dass es eine Menge $V \in \mathcal{C}$ mit $p \in V \subset U$ gibt. Sei K eine kompakte Umgebung von p. Da X ein Hausdorffraum ist, ist K abgeschlossen (also $K = \overline{K}$). Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist und $K \cap U$ eine Umgebung von p ist gibt es $V \in \mathcal{B}$ mit $p \in V \subset K \cap U \subset U$. Wir haben $\overline{V} \subset \overline{K} = K$. Damit ist $\overline{V}$ als eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raums kompakt. Die Behauptung folgt. □

1.1.6 Zusammenhängende Räume

Definition 1.1.63. Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, falls keine nichtleeren disjunkten offenen Mengen U und V mit $X = U \cup V$ existieren.

Proposition 1.1.64. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend $\iff$ X ist leer oder ein Interval.*

Beweis. $\implies$: Sei X eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist sie leer oder ein Interval. In der Tat: Sei X nicht leer. Wir nehmen an, X ist kein Interval. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R} \setminus X$, sodass $(c, \infty) \cap X \neq \emptyset$ und $(-\infty, c) \cap X \neq \emptyset$. Dann ist

$$X = ((-\infty, c) \cap X) \cup ((c, \infty) \cap X)$$

eine Zerlegung von X in nichtleere disjunkte offene Mengen. Das widerspricht die Voraussetzung, dass X zusammenhängend ist.

$\impliedby$: Falls X leer ist, dann gibt es nichts zu zeigen. Sei X ein Interval. Wir nehmen an, dass X nicht zusammenhängend ist. Dann existieren nichtleere disjunkte offene Mengen U und V mit $X = U \cap V$. Wähle $a \in U$ und $b \in V$. O.B.d.A. sei $a < b$. Dann ist $[a, b] \subset X$. Da $U \subset X$ und $V \subset X$ offen sind, ist $[a, a + \epsilon) \subset U$ und $(b - \epsilon, b] \subset V$ für ein $\epsilon > 0$ hinreichend klein. Wir setzen $c := \sup([a, b] \cap U)$. Dann ist $a + \epsilon \leq c \leq b - \epsilon$ und daher gilt $c \in (a, b) \subset X = U \cup V$. Falls $c \in U$, dann gibt es $\delta > 0$, sodass $(c - \delta, c + \delta) \subset U$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von c. Falls $c \in V$ dann gibt es $\delta > 0$, sodass $(c - \delta, c + \delta) \subset V$, was auch der Definition von c widerspricht, da $U \cap V = \emptyset$, □

Die folgende Proposition gibt uns eine nützliche äquivalente Charakterisierung zusammenhängender Räume.

Proposition 1.1.65. *Ein topologischer Raum X ist zusammenhängend $\iff$ $\emptyset$ und X sind die einzige Teilmengen von X, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei U sowohl offen als auch abgeschlossen. Dann ist $X \setminus U$ auch sowohl offen als auch abgeschlossen und $X = U \cup (X \setminus U)$ ist eine Zerlegung von X in disjunkte offene Mengen. X zusammenhängend impliziert, dass U oder $X \setminus U$ leer sein muss.

$\Longleftarrow$: Sei $X = U \cup V$ eine Zerlegung von X in disjunkten offenen Mengen U und V. Die Menge $U = X \setminus V$ ist dann sowohl offen als auch abgeschlossen. Damit ist sie entweder $\emptyset$ oder X. Entsprechend ist V entweder X oder $\emptyset$. Daraus folgt, dass keine Zerlegungen von X in nichtleeren disjunkten offenen Mengen existieren; also X ist zusammenhängend. □

Bemerkung 1.1.66. Wir werden Teilmengen von topologischen Räumen als zusammenhängend oder nichtzusammenhängend bezeichnen. Damit meinen wir, dass sie zusammenhängend bzw. nichtzusammenhängend sind wenn sie mit der Teilraumtopologie versehen werden.

Proposition 1.1.67. *Seien X und Y topologische Räume und sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $C \subset X$ zusammenhängend. Dann ist $F(C) \subset Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Die Abbildung
$$G\colon C \to F(C) \qquad x \mapsto F(x)$$
ist wegen der Eigenschaften der Teilraumtopologie stetig. Wir nehmen an, dass $F(C)$ nicht zusammenhängend ist. Dann existieren nichtleere disjunkte offene Mengen U und V mit $F(C) = U \cap V$. Dann gilt $C = G^{-1}(U) \cap G^{-1}(V)$. Die Mengen $G^{-1}(U)$ und $G^{-1}(V)$ sind wegen der Stetigkeit von G offen. Weiterhin sind sie nichtleer und disjunkt. Daraus folgt, dass C nicht zusammenhängend ist. Das ist ein Widerspruch. □

Aufgabe 1.1.68. Sei X ein topologischer Raum und sei $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen von X. Falls $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$, dann ist $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ zusammenhängend.

Definition 1.1.69. Sei X in topologischer Raum und sei $p \in X$. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X die p enthalten heißt die *Zusammenhangskomponente* von X die p enthält.

Wegen Aufgabe 1.1.68 sind die Zusammenhangskomponenten, die einen bestimmten Punkt enthalten zusammenhängend. Also ist die Zusammenhangskomponente eines topologischen Raums X, die einen Punkt p enthalten nichts anderes als die größte zusammenhängende Menge von X die p enthält.

Lemma 1.1.70. *Sei C eine Zusammenhangskomponente eines topologischen Raums X (die einen Punkt p enthält). Sei $D \subset X$ eine zusammenhängende Menge. Dann gilt entweder $C \cap D = \emptyset$ oder $D \subset C$.*

Beweis. Sei $C \cap D \neq \emptyset$. Dann ist wegen Aufgabe 1.1.68 $C \cup D$ eine zusammenhängen Menge die p enthält. Da C aber die größte zusammenhängende Menge ist die p enthält, gilt $D \subset C$. Die Behauptung folgt. □

Proposition 1.1.71. *Sei X ein topologischer Raum. Seien $x, y \in X$. Wir bezeichnen mit C_x und C_y die Zusamenhangskomponenten von X die x bzw. y enthalten. Dann gilt entweder $C_x \cap C_y = \emptyset$ oder $C_x = C_y$.*

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Lemma 1.1.70. □

Bemerkung 1.1.72. Wegen Proposition 1.1.71 ist jeder topologischer Raum X die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe 1.1.73. Sei X ein topologischer Raum. Betrachte die folgende Äquivalenzrelation auf X: $x \sim y$ genau dann, wenn eine zusammenhängende Teilmenge von X existiert, die sowohl x als auch y enthält. Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation genau die Zusammenhangskomponenten von X sind.

Bemerkung 1.1.74. Aus Proposition 1.1.67 folgt, dass zwei homöomorphen Räume die gleiche Anzahl von Zusammenhangskomponenten haben. In der Tat: seien X und Y topologische Räume und sei $F\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann kann, wegen der Proposition 1.1.67, Y nicht mehr Zusammenhangskomponenten als X haben. Wenn wir F mit F^{-1} ersetzen, sehen wir, dass X nicht mehr Zusammenhangskomponenten als Y haben kann.

Definition 1.1.75. Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenhängend*, falls für jedes $p \in X$ und jede offene Umgebung U von p eine zusammenhängende offene Umgebung V von p mit $V \subset U$ existiert.

Proposition 1.1.76. *Sei X ein lokal zusammenhängender Raum. Dann sind die Zusammenhangskomponenten von X offen.*

Beweis. Sei C eine Zusammenhangskomponente von X. Sei $p \in C$. Dann besitzt p eine zusammenhängende offene Umgebung D. Da $p \in C \cap D$, folgt aus Lemma 1.1.70, dass $D \subset C$. Daraus folgt, dass C offen ist. □

Korollar 1.1.77. Sei X ein lokal zusammenhängender Raum. Dann ist X die topologische Summe seiner Zusammenhangskomponenten.

Beweis. Folgt sofort aus Bemerkung 1.1.72 und Proposition 1.1.35 un Proposition 1.1.76. □

1.1.7 Wegzusammenhängende Räume

Definition 1.1.78. Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, falls es für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(i) = x_i$ (für $i \in \{0,1\}$) gibt.

Bemerkung 1.1.79. Wir betrachten γ wie in Definition 1.1.78 als ein stetiger Pfad, der die Punkte x_0 und x_1 miteinander verbindet. Also sind wegzusammenhängende Räume topologische Räume, in denen je zwei Punkte mit einem stetigen Pfad miteinander verbunden werden können.

Aufgabe 1.1.80. Seien X und Y topologische Räume und sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $C \subset X$ eine wegzusammenhängende Teilmenge von X. Dann ist $F(C)$ wegzusammenhängend.

Definition 1.1.81. Sei X ein topologischer Raum. Betrachte die Äquivalenzrelation $\sim_p$ auf X, definiert durch

$$x \sim_p y \iff \exists \gamma\colon [0,1] \to M,\ \textit{sodass}\ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y.$$

Eine Äquivalenzklasse von $\sim_p$ heißt eine *Wegzusammenhangskomponente* von X.

Bemerkung 1.1.82. Wegen Aufgabe 1.1.80 haben homöomorphe Räume dieselbe Anzahl von Wegzusammenhangskomponenten.

Beispiel 1.1.83. Die Wegzusammenhangskomponenten der Menge $[-1,1] \cup [3,4]$ sind $[-1,1]$ und $[3,4]$. Es ist klar, dass diese zwei Teilmengen wegzusammenhängend sind. Weiterhin kann wegen des Zwischenwertsatzes, kein Punkt der Menge $[-1,1]$ mittels eines stetigen Pfads mit einem Punkt der Menge $[3,4]$ verbunden werden.

Proposition 1.1.84. *Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen X ist nicht zusammenhängend. Dann existieren nichtleere disjunkte offene Mengen U und V mit $X = U \cup V$. Sei $p \in U$ und $q \in V$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein stetiger Pfad, der p und q verbindet. Die Zerlegung

$$\gamma([0,1]) = (\gamma([0,1]) \cap U) \cup (\gamma([0,1]) \cap V)$$

ist eine Zerlegung von $\gamma([0,1])$ in nichtleere disjunkte offene Mengen. Das widerspricht der Tatsache, dass $\gamma([0,1])$ zusammenhängend ist. □

Die Umkehrung von Proposition 1.1.84 gilt nicht.

Aufgabe 1.1.85. Zeigen Sie, dass

$$S := \{0\} \times [0,1] \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x}))|x \in (0,1]\}$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Definition 1.1.86. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, falls für jedes $p \in X$ und jede offene Umgebung U von p eine offene wegzusammenhängende Umgebung V von p mit $V \subset U$ existiert.

Bemerkung 1.1.87. Proposition 1.1.84 impliziert, dass lokal wegzusammenhängende Räume lokal zusammenhängend sind.

Proposition 1.1.88. *Sei X ein lokal wezusammenhängender Raum. Falls X zusammenhängend ist, ist er auch wegzusammenhängend. In diesem Fall stimmen die Zusammenhangskomponenten mit den Wegzusammenhangskomponenten überein.*

Beweis. Sei $p \in X$. Betrachte die Menge

$$S_p := \{q \in X | \exists \gamma\colon [0,1] \to X \textit{ stetig mit } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

Wir zeigen $S_p = X$. Da X zusammenhängend ist, ist $S_p = X$ äquivalent dazu, dass S_p nichtleer offen und abgeschlossen ist.

- Die Menge S_p ist nicht leer, da $p \in S_p$.
- Die Menge S_p ist offen: Sei $q \in S_p$. Da X lokal wegzusammenhängend ist, besitzt q eine wegzusammenhängende offene Umgebung V. Für alle $q' \in V$ existiert eine stetige Abbildung $\eta\colon [0,1] \to V$ mit $\eta(0) = q$ und $\eta(1) = q'$. Weiterhin, da $q \in S_p$, existiert eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Die stetige Abbildung

$$\eta\gamma\colon [0,1] \to X \qquad t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \textit{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \eta(2t-1) & \textit{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

verbindet dann p und q' miteinander. Daraus folgt, dass $V \subset S_p$.

- Die Menge S_p ist abgeschlossen: Sei $r \in X \setminus S_p$. Wir zeigen, dass r eine Umgebung U mit $U \cap S_p = \emptyset$ besitzt. Da X lokal wegzusammenhängend ist, besitzt r eine wegzusammenhängende offene Umgebung U. Falls, $q \in U \cap S_p$, dann können wir p mit q und q mit r verbinden. Durch Verkettung von Pfaden wie oben können wir dann p mit r verbinden. Das ist ein Widerspruch. Also es gilt $U \cap S_p = \emptyset$.

Die Übereinstimmung der Zusammenhangskomponenten mit den Wegzusammenhangskomponenten für lokal wegzusammenhängende Räume wird als Aufgabe den Student*innen überlassen. $\square$

1.2 Wiederholung: Differentialrechnung

In diesem Abschnitt wiederholen wir die wichtigsten Konzepte und Resultate aus der Differentialrechnung. Wir werden einige bekannte Resultate etwas allgemeiner formulieren als sie in einer ersten Vorlesung in Analysis auftauchen. Die Beweise dieser allgemeineren Aussagen sind aber identisch zu den Beweisen der entsprechenden spezielleren Aussagen.

Seien $(V, ||\cdot||_V$ und $(W, ||\cdot||_W)$ normierte endlich-dimensionale Vektorräume. Wir bezeichnen mit $\mathrm{L}(V;W)$ den Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W.

Proposition 1.2.1. *Die Abbildung* $\mathrm{L}(V;W) \ni A \mapsto \sup_{v \in V, ||v||_V = 1} ||A(x)||_W$ *definiert eine Norm auf* $\mathrm{L}(V;W)$.

Definition 1.2.2. Seien V und W wie oben. Die Norm auf $\mathrm{L}(V;W)$, definiert in Proposition 1.2.1, heißt die *Operatornorm.*

Wir werden den Vektorraum der linearen Operatoren zwischen normierten Räumen immer mit der Operatornorm versehen.

Bemerkung 1.2.3. Alle Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen sind äquivalent; d.h. für je zwei Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ auf einem endlich-dimensionalem Vektorraum V existieren $C_1, C_2 > 0$, sodass für alle $v \in V$

$$C_1||v||_1 \leq ||v||_2 \leq C_2||v||_1.$$

Bemerkung 1.2.4. Sei $(V, ||\cdot||)$ ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum. V ist dann ein metrischer Raum mit der Metrik $d(x,y) = ||x-y||$. Wegen Bemerkung 1.2.3 stimmen die durch diese Metrik induzierten Topologien auf V für unterschiedliche Normen überein. Weiterhin stimmt die Topologie auf V, induziert durch die Metrik d, mit der „Standardtopologie“ auf V (siehe Beispiel 1.1.31) überein (**Warum?**).

Definition 1.2.5. Seien $(V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||_W)$ normierte endlich-dimensionale Vektorräume. Sei $U \subset V$ offen und $F \colon U \to W$ stetig.

- Die Abbildung F heißt *differenzierbar an der Stelle* $p \in U$, falls es eine $A \in \mathrm{L}(V;W)$ gibt, sodass für alle $h \in V$ mit $p + h \in U$

  $$F(p+h) = F(p) + A(h) + r(h)$$

  mit $\lim_{h\to 0} ||\frac{r(h)}{||h||_V}||_W = 0$. In diesem Fall heißt A das *Differntial* von F an der Stelle p und wir setzen $(DF)_p := A$.

- Falls F an allen Stellen $p \in U$ differenzierbar ist, heißt F *differenzierbar auf* U. F heißt eine C^1-*Abbildung auf* U, falls F differenzierbar auf U ist und

  $$DF\colon U \to \mathrm{L}(V;W) \qquad p \mapsto (DF)_p$$

  stetig ist.

Bemerkung 1.2.6. Falls das Differential einer Abbildung an einem Punkt existiert, dann ist es eindeutig: Sei F wie in Definition 1.2.5. Seien A und B Differentiale von F an der Stelle p. Dann gilt

$$F(p+h) = F(p) + A(h) + r_1(h), \quad F(p+h) = F(p) + B(h) + r_2(h)$$

mit $\lim_{h\to 0} ||\frac{r_1(h)}{||h||_V}||_W = \lim_{h\to 0} ||\frac{r_2(h)}{||h||_V}||_W = 0$. Daraus folgt

$$(A-B)(h) = R(h) \ mit \ \lim_{h\to 0} ||\frac{R(h)}{||h||_V}||_W = 0,$$

wobei wir $R(h) \coloneqq r_2(h) - r_1(h)$ gesetzt haben. Da $A-B$ linear ist gilt $\lim_{h\to 0} ||\frac{R(h)}{||h||_V}||_W = \lim_{h\to 0} ||R(\frac{h}{||h||_V})||_W = 0$, was impliziert, dass $A - B(v)$ für alle $v \in V$ mit $||v||_V = 1$ verschwindet. Daraus folgt $A - B = 0$.

Bemerkung 1.2.7. Da alle Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen äquivalent sind, sind die Definitionen der Differenzierbarkeit und des Differentials unabhängig von der Wahl der Normen auf V und W.

Wir werden stetige Funktionen auch als C^0-Funktionen bezeichnen. Rekursiv definiert man C^k-Funktionen:

Definition 1.2.8. Seien $(V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||)$ normierte endlich-dimensionale Vektorräume. Sei $U \subset V$ offen und $F\colon U \to W$ stetig. Sei $k \geq 2$. F heißt eine C^k-Funktion, wenn sie eine C^{k-1} Abbildung ist und die Funktion

$$\underbrace{D\cdots D}_{k-1-mal} F \eqqcolon D^{k-1}F\colon U \to \mathrm{L}(V; L(V; \cdots, \mathrm{L}(V;W \underbrace{))\cdots)}_{k-1-mal}$$

eine C^1-Abbildung ist. Die Abbildung F heißt eine C^∞- oder *glatte* Abbildung, falls sie für alle $k \in \mathbb{N}$ eine C^k-Abbildung ist

Beispiel 1.2.9. Seien V und W normierte endlich-dimensionale Vektorräume. Sei $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir wissen dann, dass A stetig ist. Aus der Definition des Differentials folgt unmittelbar, dass A auf V differenzierbar ist mit konstantem Differential:

$$DA\colon V \to \mathrm{L}(V;W) \qquad p \mapsto A.$$

Da die Abbildung DA konstant ist, ist sie auch differenzierbar und es gilt $D^2A = 0$. Auch alle höheren Ableitungen existieren und verschwinden.

Proposition 1.2.10. *Seien V, W und X normierte endlich-dimensionale Vektorräume und $U \subset V$ offen. Seien $F\colon U \to W$ und $G\colon W \to X$ differenzierbare Abbildungen. Dann ist $G \circ F$ differenzierbar auf U und es gilt für alle $p \in U$*

$$D(G\circ F)_p = (DG)_{F(p)} \circ (DF)_p$$

Bemerkung 1.2.11. Sei $k \in \mathbb{N}$ oder $k = \infty$. Falls F und G, in der Situation von Proposition 1.2.10, C^k-Abbildungen sind, ist $G \circ F$ auch eine C^k-Abbildung.

Definition 1.2.12. Seien V und W normierte endlich-dimensionale Vektorräume. Seien $U \subset V$ und $U' \subset W$ offen. Eine C^k-Abbildung $F \colon U \to U'$ heißt ein *C^k-Diffeomorphismus*, falls sie bijektiv ist und die Inverse $F^{-1} \colon F(U) \to U \subset V$ eine C^k-Abbildung ist.

Beispiel 1.2.13. Jeder Isomorphismus zwischen normierten, endlich-dimensionalen Vektorräumen ist eine C^∞-Diffeomorphismus.

Das folgende Theorem ist sehr nützlich. Es wird häufiger „The Inverse Mapping Theorem“ oder „der Satz der lokalen Umkehrbarkeit“ genannt.

Theorem 1.2.14. *Seien V und W normierte endlich-dimensionale Vektorräume und $U \subset V$ offen. Sei $F \colon U \to W$ eine C^k-Abbildung. Falls $(DF)_p \colon V \to W$ invertierbar ist, dann existiert eine offene Umgebung $\widetilde{U}$ von p, sodass $F(\widetilde{U})$ offen ist und $F \colon \widetilde{U} \to F(\widetilde{U})$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.*

Bemerkung 1.2.15. Wie kann man das Differential konkret berechnen? Im Folgenden diskutieren wir eine praktische Methode für die Berechnung des Differentials. Seien V und W normierte endliche-dimensionale Räume und sei $F \colon V \supset U \to W$ eine C^1-Abbildung. Seien $v \neq 0$, $p \in U$ und $t \in \mathbb{R}$ hinreichend klein. Aus der Definition des Differentials erhalten wir

$$F(p + tv) = F(p) + (DF)_p(tv) + r(tv) = F(p) + t(DF)_p(v) + r(tv)$$

mit $||\frac{r(tv)}{||tv||_V}||_W = \frac{1}{||v||_V}||\frac{r(tv)}{t}||_W \xrightarrow{t \to 0} 0$. Daraus folgt

$$t(DF)_p(v) = F(p + tv) - F(p) + r(tv).$$

Wenn wir nun die obige Gleichung durch t teilen und die Limites der beiden Seiten für $t \to 0$ gleich setzen, erhalten wir:

$$(DF)_p(v) = \lim_{t \to 0} \frac{F(p + tv) - F(p)}{t}. \tag{$*$}$$

Für $\epsilon \in \mathbb{R}$ hinreichend klein, definieren wir die Abbildung $\gamma \colon (-\epsilon, \epsilon) \to V, t \mapsto p + tv$. Aus Gleichung $(*)$ erhalten wir

$$(DF)_p(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma)|_{t=0}$$

Aufgabe 1.2.16. Im Folgenden benutzen wir die Identifikation

$$\mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \qquad M \mapsto (v \mapsto Mv)$$

und versehen $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ mit der Operatornorm. Wir bezeichnen mit id_n die $n \times n$-Identitätsmatrix.

1. (i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ ist.

   (ii) Zeigen Sie, dass die Inversionsabbildung

   $$\mathrm{Inv} \colon \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \qquad A \mapsto A^{-1}$$

   glatt ist und berechnen Sie $(D\mathrm{Inv})_{\mathrm{id}_n} \colon \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$. Dabei können Sie die geometrische Reihe benutzen: Für $H \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ mit Operatornorm $||H|| < 1$ ist $\mathrm{id}_n + H$ invertierbar und es gilt

   $$(\mathrm{id}_n - H)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} H^i.$$

2. Zeigen Sie, dass die Determinantenabbildung $\det\colon \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ glatt ist und berechnen Sie $(D\det)_{\mathrm{id}_n}\colon \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.2.17. Wir haben oben das Konzept der Differenzierbarkeit nur für Funktionen, die auf *offenen* Teilmengen von Vektorräumen definiert sind eingeführt. Für unsere spätere Diskussion über Mannigfaltigkeiten mit Rand benötigen wir die folgende Verallgemeinerung. Seien V und W normierte endliche-dimensionale Vektorräume und sei $S \subset V$ eine beliebige Teilmenge von V. Sei $F\colon S \to W$ eine stetige Abbildung. F heißt differenzierbar auf S, falls für jedes $p \in S$ eine offene Umgebung U und eine differenzierbare Fortsetzung von F auf U existiert; d.h. eine differenzierbare Funktion $\widetilde{F}\colon U \to W$ mit $\widetilde{F}|_{S\cap U} = F|_{S\cap U}$. Offensichtlich, stimmt diese Definition mit der vorherigen Definition der Differenzierbarkeit überein, falls S eine offene Teilmenge von V ist.

Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$

Jetzt betrachten wir den Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$, versehen mit der euklidischen Norm. Im Folgenden bezeichnen wir mit $r^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Standardkoordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$:

$$r^i\colon (x^1, \cdots, x^n) \mapsto x^i.$$

Weiterhin bezeichnen wir, mit etwas Notationsmissbrauch, den i-ten Standardbasisvektor in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ mit e_i.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir bezeichnen die i-te Komponentenfunktion $r^i \circ F\colon U \to \mathbb{R}$ mit F^i. Das Differential von F an der Stelle $p \in U$ ist dann eine lineare Abbildung $(DF)_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Mit $\frac{\partial F^i}{\partial r^j}$ bezeichnen wir die partielle Ableitung von F^i in die Richtung von e_j. Nach Definition gilt

$$\frac{\partial F^i}{\partial r^j}\colon U \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{F^i(p + te_j) - F^i(p)}{t}.$$

Proposition 1.2.18. *Die Abbildung F ist eine C^1-Abbildung auf U genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial F^i}{\partial r^j}$ existieren und stetig sind.*

Nach Wahl einer Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ kann diese lineare Abbildung durch eine Matrix dargestellt werden.

Proposition 1.2.19. *Falls F an einer Stelle p differenzierbar ist, ist die ij-te Komponente der darstellenden Matrix von $(DF)_p$ in den Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ gegeben durch $\frac{\partial F^i}{\partial r^j}(p)$.*

Beweis. Nach Definition der darstellenden Matrix, ist die ij-te Komponente der darstellenden Matrix von $(DF)_p$ in der Standardbasis gegeben durch $r^i((DF)_p(e_j))$. Nach Bemerkung 1.2.15 gilt:

$$r^i((DF)_p(e_j)) = r^i\left(\lim_{t\to 0} \frac{F(p + te_j) - F(p)}{t}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{F^i(p + te_j) - F^i(p)}{t} = \frac{\partial F^i}{\partial r^j}(p).$$

□

Die folgende Proposition ist eine Verallgemeinerung von Proposition 1.2.18.

Proposition 1.2.20. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Abbildung F, wie oben, ist eine C^k-Abbildung auf U genau dann, wenn die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial^j F^i}{\partial r^{l_1} \cdots \partial r^{l_j}}$$

für alle $1 \le i \le m, 1 \le j \le k$ und $1 \le l_1, \cdots, l_j \le n$ existieren und stetig sind.

Im Folgenden betrachten wir den Fall $m = 1$.

Definition 1.2.21. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf U. F heißt *reell-analytisch an der Stelle* p, falls die Funktion f in einer offenen Umgebung von p durch die Taylorreihe von f an der Stelle p,

$$f(x) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)(r^i(x) - r^i(p)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial r^i \partial r^j}(p)(r^i(x) - r^i(p))(r^j(x) - r^j(p)) +$$

$$\cdots + \frac{1}{k!}\sum_{l_1,\cdots,l_k} \frac{\partial^k f}{\partial r^{l_1} \cdots \partial r^{l_k}}(p)(r^{l_1}(x) - r^{l_1}(p)) \cdots (r^{l_k}(x) - r^{l_k}(p)) + \cdots ,$$

gegeben ist. Die Funktion f heißt *reell-analytisch auf* U falls, sie an jeder Stelle $p \in U$ reell-analytisch ist.

Nicht alle glatte Funktionen sind reell-analytisch. Die Funktion

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \textit{falls } x > 0 \\ 0 & \textit{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

ist glatt aber nicht reell-analytisch (**Aufgabe**). Jedoch spielt die Taylorentwicklung von Funktionen bei der Untersuchung ihres lokalen Verhaltens eine Rolle.

Definition 1.2.22. Eine Teilmenge S von $\mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bzgl. eines Punkts $p \in S$, falls für alle $x \in S$ die Strecke $\{p + t(x - p) | t \in [0, 1]\}$ vollständig in S enthalten ist.

Proposition 1.2.23. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bzgl. $p \in U$. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Abbildung. Dann existieren stetige Funktionen $g_1, \ldots, g_n\colon U \to \mathbb{R}$, sodass*

$$f(x) = f(p) + \sum_i g_i(x)(r^i(x) - r^i(p)).$$

und $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)$.

Beweis. Da U bzgl. p sternförmig ist und f eine stetig differenzierbare Funktion ist, ist die Funktion $t \mapsto f(p + t(x - p))$ wohldefiniert und stetig differenzierbar. Mit Kettenregel erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(p + t(x - p))) = \sum_i (r^i(x) - r^i(p))(\frac{\partial f}{\partial r^i}(p + t(x - p))).$$

Aus dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$f(p+1(x-p)) - f(p+0(x-p)) = f(x) - f(p) = \sum_i (r^i(x) - r^i(p)) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p+t(x-p))\mathrm{d}t.$$

Wir setzen $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p + t(x - p))\mathrm{d}t$. Dann gilt

$$f(x) = f(p) + \sum_i g_i(x)(r^i(x) - r^i(p)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)$. Nach Definition gilt

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p + t(p - p))\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)\mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p). \quad \square$$

Aufgabe 1.2.24. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bzgl. $p \in U$. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine C^2-Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)(r^i(x) - r^i(p)) +$$

$$\sum_{i,j} \left[(r^i(x) - r^i(p))(r^j(x) - r^j(p)) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial r^i \partial r^j}(p + t(x-p)) \right].$$

Kapitel 2

Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden bezeichnen wir mit $r^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Standardkoordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$:

$$r^i\colon (x^1, \cdots, x^n) \mapsto x^i.$$

Weiterhin wird $\mathbb{R}^n$ immer mit der Standardtopologie versehen.

2.1 Topologische Mannigfaltigkiten

Definition 2.1.1.

- Ein topologischer Raum X heißt *lokal euklidisch* der Dimension n, falls jedes $p \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist. Präziser: Für alle p, existieren eine offene Umgebung U von p und ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to V$, wobei V eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

- Seien U und φ wie oben. Die Abbildung φ heißt eine *Koordinatenabbildung* und die Funktionen $x^i := r^i \circ \varphi$ heißen *Koordinatenfunktionen*. Das Paar (U, φ) heißt ein *Koordinatensystem* oder eine *Karte*.

Bemerkung 2.1.2. Mit der oberen Definition ist die leere Menge ein lokal euklidischer Raum von beliebiger Dimension.

Bemerkung 2.1.3. Mittels der algebraischen Topologie kann man zeigen, dass die Dimension eines nichtleeren lokal euklidischen Raums wohldefiniert ist; d.h. falls ein nichtleerer topologischer Raum lokal euklidisch der Dimension n ist, dann kann er nicht lokal euklidisch der Dimension $m \neq n$ sein.

Bemerkung 2.1.4. Lokal euklidische Räume der Dimension 0 haben notwendigerweise die diskrete Topologie. Das liegt daran, dass die einzigen offenen Mengen von $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, die leere Menge und $\{0\}$ sind. In einem lokal euklidischen Raum der Dimension 0 hat jeder Punkt p eine offene Umgebung die homöomorph zu $\{0\}$ ist. Diese offene Umgebung kann nur $\{p\}$ sein. Daraus folgt, dass jede einpunktige Teilmenge eines lokal euklidischen Raums der Dimension 0 offen ist. Solche Räume besitzen also die diskrete Topologie. Umgekehrt ist jede Menge, versehen mit der diskreten Topologie, ein lokal euklidischer Raum der Dimension 0. Wir nennen eine Menge, versehen mit der diskreten Topologie, einen *diskreten Raum*.

Bemerkung 2.1.5. Sei X ein lokal euklidischer Raum der Dimension n. Sei $p \in X$. Dann können wir eine Karte (U, φ) um p finden mit $\varphi(p) = 0$. Solche Karten heißen *zentriert* um p. In der Tat: Sei (U, ψ) eine beliebige Karte um p. Wir definieren

$$\varphi\colon U \to \psi(U) - \psi(p) \qquad x \mapsto \psi(x) - \psi(p),$$

wobei $\psi(U) - \psi(p)$ die Menge

$$\{y - \psi(p) | y \in \psi(U)\}$$

bezeichnet. Sei nun $r > 0$. Dann können wir, wie folgt, eine zentrierte Karte (U, φ) um p finden mit $\varphi(U) = B_r(0)$: Sei (V, ψ) eine zentrierte Karte um p. Da $\psi(V)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist und $0 \in \psi(V)$, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(V) \subset \psi(V)$. Wir setzen $U := \psi^{-1}(B_\epsilon(0))$ und definieren

$$\varphi\colon U \to B_r(0) \qquad x \mapsto \frac{r}{\epsilon}\psi(x).$$

(U, φ) ist die gesuchte Karte. Ähnlich können wir zentrierte Karten konstruieren mit der Eigenschaft, dass das Bild der Koordinatenabbildung der offene Kubus mit Seitenlange r und Zentrum 0,

$$C_{\frac{r}{2}}(0) := \{y \in \mathbb{R}^n | |r^i(y)| < \frac{r}{2}\},$$

ist.

Definition 2.1.6. Ein topologischer Raum M heißt eine *topologische Mannigfaltigkeit* der Dimension n, falls M

- lokal euklidisch der Dimension n,
- Hausdorff und
- zweitabzählbar ist.

Beispiel 2.1.7.

- Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist Hausdorff und zweitabzählbar und besitzt eine „globale“ Karte. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist trivialerweise ein Homöomorphismus. $\mathbb{R}^n$ ist daher eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Es gibt aber auch andere Koordinatenabbildungen auf $\mathbb{R}^n$ außer der Identitätsabbildung. Wir betrachten z. B. die Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}) \to (0, \infty) \times (0, 2\pi)$$

$$P := (x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2},\ \textit{Winkel zwischen } \overline{0P} \textit{ und der x-Achse }).$$

- Allgemeiner sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, versehen mit der Topologie, die im Beispiel 1.1.31 eingeführt wurde. Mit dieser Topologie ist V Hausdorff und zweitabzählbar (da $\mathbb{R}^n$ Hausdorff und zweitabzählbar ist). Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann ist die Abbildung

$$\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n \qquad \sum_i \xi^i v_i \mapsto (\xi^1, \cdots, \xi^n),$$

nach Konstruktion der Topologie auf V, ein Homöomorphismus. Damit ist (V, φ) eine globale Karte für V. Jeder n-dimensionale reelle Vektorraum ist daher eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n.

Beispiel 2.1.8. Betrachte $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | ||x|| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ versehen mit der Teilraumtopologie. Hier bezeichnet $||x||$ die euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist S^n Hausdorff und zweitabzählbar. Wir zeigen nun, dass S^n lokal euklidisch der Dimension n ist. Für $1 \leq i \leq n+1$ setzen wir:

$$U_i^+ = \{x \in S^n | r^i(x) > 0\}, \qquad U_i^- = \{x \in S^n | r^i(x) < 0\}$$

und definieren

$$\varphi_i^\pm \colon U_i^\pm \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto (r^1(x), \cdots, r^{i-1}(x), r^{i+1}(x), \cdots, r^{n+1}(x)).$$

Das Bild von $\varphi_i^\pm$ ist der offene Ball mit Radius 1 und Zentrum 0 in $\mathbb{R}^n$, den wir mit $B_1(0)$ bezeichnen. Wir behaupten, dass $\varphi_i^\pm \colon U_i^\pm \to B_1(0)$ ein Homöomorphismus ist. Wir beweisen diese Aussage im Folgenden nur für φ_1^+. Die Abbildung φ_1^+ ist als Einschränkung der stetigen Projektionsabbildung

$$\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto (r^2(x), \cdots, r^{n+1}(x))$$

stetig. Weiterhin ist φ_1^+ bijektiv mit der inversen Abbildung

$$\psi_1^+ \colon \mathbb{R}^n \supset B_1(0) \to U_1^+ \qquad (y^1, \cdots, y^n) \mapsto (\sqrt{1 - ||y||^2}, y^1, \cdots, y^n).$$

Es bleibt zu zeigen, dass ψ_1^+ stetig ist. Wegen Proposition 1.1.20 reicht es zu zeigen, dass die Verkettung von ψ_1^+ mit der Inklusionsabbildung $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ stetig ist. Diese Verkettung ist wieder gegeben durch

$$(y^1, \cdots, y^n) \mapsto (\sqrt{1 - ||y||^2}, y^1, \cdots, y^n)$$

und ist damit stetig.

Beispiel 2.1.9.

- Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann ist jede offene Teilmenge U von M, versehen mit der Teilraumtopologie, auch eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n. In der Tat: Sei $p \in U$. Dann existiert eine offene Umgebung V von p in M und ein Homöomorphismus $\varphi \colon V \to W$ mit $W \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\widetilde{V} := V \cap U$ ist eine offene Teilmenge von sowohl U als auch V. Die Einschränkung $\varphi|_{\widetilde{V}} \colon \widetilde{V} \to \varphi(\widetilde{V})$ ist dann ein Homöomorphismus, da φ ein Homöomorphismus ist. Weiterhin, da $\widetilde{V}$ eine offene Teilmenge von V ist, ist $\varphi(\widetilde{V})$ eine offene Teilmenge von W. Wegen der Offenheit von W als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und Aufgabe 1.1.19, ist $\varphi(\widetilde{V})$ in $\mathbb{R}^n$ offen. Damit ist $(\widetilde{V}, \varphi|_{\widetilde{V}})$ eine Karte für U, die in einer Umgebung von p definiert ist.

- Wir bezeichnen mit $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ den Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und mit $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ die Teilmenge der invertierbaren Matrizen. Wir versehen $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ mit der Standardtopologie. $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ (siehe Aufgabe 1.2.16). Daher ist $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ ein lokal euklidischer Raum der Dimension n^2.

Beispiel 2.1.10. Wegen Bemerkung 2.1.4 wissen wir, dass die lokal euklidischen Räume der Dimension 0 genau die diskreten Räume sind. Diskrete Räume sind offensichtlich Hausdorff. Solche Räume sind zweitabzählbar genau dann, wenn sie abzählbar viele Elemente haben. Also sind die null-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten genau die abzählbaren diskreten Räume.

Beispiel 2.1.11. Betrachte die Teilmenge $X := \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, versehen mit der Teilraumtopologie. Als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist X Hausdorff und zweitabzählbar. Der Raum X ist aber nicht lokal euklidisch. Da X nicht diskret ist, kann er kein lokal euklidischer Raum der Dimension 0 sein. Wir nehmen an, dass X ein lokal euklidischer Raum der Dimension $n \geq 1$ ist. Sei (U, φ) eine zentrierte Karte um $0 \in X$ mit $\varphi(U) = B_1(0)$. Falls $n = 1$, hat $B_1(0) \setminus \{0\}$ zwei Zusammenhangskomponenten. Falls $n > 1$, ist $B_1(0) \setminus \{0\}$ zusammenhängend. Anderseits hat $U \setminus \{0\}$ vier Zusammenhangskomponenten. Das ist ein Widerspruch.

Beispiel 2.1.12. Sei $X = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{R}^n$. Betrachte die Äquivalenzrelation $\sim$, die durch die Identifikation jedes $p \neq 0$ aus der ersten Kopie von $\mathbb{R}^n$ mit demselben Punkt aus der zweiten Kopie definiert wird. $X/\sim$, versehen mit der Quotiententopologie, ist dann lokal euklidisch der Dimension n und zweitabzählbar, aber nicht Hausdorff (**Aufgabe**).

Beispiel 2.1.13. Die topologische Summe von überabzählbar vielen Kopien von $\mathbb{R}^n$ ist lokal euklidisch der Dimension n und Hausdorff, aber nicht zweitabzählbar (**Warum?**).

Proposition 2.1.14. *Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokalkompakt und lokal wegzusammenhängend.*

Beweis. Da diskrete Räume offensichtlich lokalkompakt und lokal wegzusammenhängend sind, betrachten wir topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension größer 0. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$ und sei $p \in M$. Sei (U, φ) eine zentrierte Karte um p mit $\varphi(U) = B_1(0)$. Da $\overline{B_{\frac{1}{2}}(\varphi(p))}$ kompakt und φ ein Homöomorphismus ist, ist $\varphi^{-1}(\overline{B_{\frac{1}{2}}(\varphi(p))})$ eine kompakte Umgebung von p. Damit ist M lokalkompakt. Sei nun V eine Umgebung von p. Da $V \cap U$ eine offene Umgebung von p ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta(\varphi(p)) \subset \varphi(V \cap U)$. Da $B_\delta(\varphi(p))$ wegzusammenhängend und φ ein Homöomorphismus ist, ist $\varphi^{-1}(B_\delta(\varphi(p)))$ wegzusammenhängend. Offensichtlich gilt $\varphi^{-1}(B_\delta(\varphi(p))) \subset V$. Daraus folgt, dass M lokal wegzusammenhängend ist. □

2.2 Differenzierbare Strukturen und Mannigfaltigkeiten

Eines unserer Hauptziele in dieser Vorlesung ist die Verallgemeinerung der Konzepte und Techniken der Differential- und Integralrechnung auf allgemeinere geometrische Objekte. Da topologische Mannigfaltigkeiten lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen, könnte man denken, dass eine Verallgemeinerung der Methoden der Analysis für sie möglich ist. Zum Beispiel sieht es auf den ersten Blick so aus, als ob wir in zwei unterschiedlichen Weisen den Begriff der Glattheit für Funktionen, die auf topologischen Mannigfaltigkeiten definiert sind, einführen können. **Diese beiden Versuche führen allerdings zu ungeeigneten Definitionen.**

- *Erster Versuch*: Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Eine stetige Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ heißt glatt genau dann, wenn für jedes $p \in M$ eine Karte (U, φ) mit $p \in U$ existiert, sodass $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}$ glatt ist.

- *Zweiter Versuch*: Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Eine stetige Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ heißt glatt genau dann, wenn die Funktion $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}$ für alle Karten (U, φ) glatt ist.

Das folgende Beispiel zeigt, warum diese beiden Ansätze problematisch sind.

Beispiel 2.2.1. Wir bezeichnen mit $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Homöomorphismus $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$. Wir setzen $\psi := \varphi^{-1}$. Die Paare $(\mathbb{R}, \varphi)$ und $(\mathbb{R}, \psi)$ sind Karten auf $\mathbb{R}$. Die an der Stelle 0 nichtdifferenzierbare Funktion φ ist, nach der Definition im ersten Versuch oben, glatt; da $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}$. Anderseits ist die, nach Analysis I, glatte Identitätsfunktion $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nach der Definition im zweiten Versuch, nicht glatt; da $\mathrm{id} \circ \psi^{-1} = \mathrm{id} \circ \varphi = \varphi$.

Das obige Problem wird mit der Einführung von differenzierbaren Strukturen gelöst.

Definition 2.2.2. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Eine *differenzierbare Struktur der Klasse C^k* auf M ist eine Familie $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ von Karten auf M mit den folgenden Eigenschaften:

1. $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.
2. Für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ sind

   $$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \qquad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

   C^k-Abbildungen.
3. $\mathcal{F}$ ist maximal bezüglich der Eigenschaft 2; d. h. falls (U, φ) eine Karte auf M ist, sodass $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ und $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ für alle $\alpha \in \Lambda$ C^k-Abbildungen sind, dann gilt $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Definition 2.2.3. Ein Paar $(M, \mathcal{F})$, wobei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine differenzierbare Struktur der Klasse C^k auf M ist, heißt eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k*.

Bemerkung 2.2.4. Seien (U, φ) und (V, ψ) Karten auf einer topologischen Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $\varphi \circ \psi^{-1}$ heißt der *Kartenwechsel* oder die *Koordinatentransformation.*

Bemerkung 2.2.5. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Klasse C^∞ werden auch *glatte Mannigfaltigkeiten* genannt. Da wir fast immer mit glatten Mannigfaltigkeiten arbeiten werden, benutzen wir den Begriff „Mannigfaltigkeit“ als Synonym für „glatte Mannigfaltigkeit“ und den Begriff „differenzierbare Struktur“ als Synonym für „differenzierbare Struktur der Klasse C^∞“.

Bemerkung 2.2.6. Mit einer *Mannigfaltigkeitsstruktur* auf einer Menge X meinen wir die Auswahl einer Topologie auf X, die X zu einer topologischen Mannigfaltigkeit macht und eine differenzierbare Struktur auf X, versehen mit dieser Topologie.

Wegen Eigenschaft 3 in der Definition 2.2.2 ist es schwierig, eine differenzierbare Struktur auf einer topologischen Mannigfaltigkeit konkret zu beschreiben. Proposition 2.2.8 erleichtert das Definieren von differenzierbaren Strukturen. Zuerst eine

Definition 2.2.7. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Eine Familie von Karten auf M, die die ersten zwei Eigenschaften in der Definition 2.2.2 erfüllt, heißt ein *Atlas* der Klasse C^k für M.

Proposition 2.2.8. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und sei $\mathcal{F}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ein Atlas der Klasse C^k für M. Dann existiert eine eindeutige differenzierbare Struktur $\mathcal{F}$ der Klasse C^k auf M mit $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Familie aller Karten (U,φ) auf M mit der Eigenschaft, dass $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ und $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ für alle $\alpha \in \Lambda$ C^k-Abbildungen sind. Wir behaupten, dass $\mathcal{F}$ die gesuchte Familie ist.

Da $\mathcal{F}_0$ die Eigenschaft 2 aus der Definition 2.2.2 erfüllt, gilt $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{F}$ eine differenzierbare Struktur der Klasse C^k ist. Da $\mathcal{F}_0$ die Eigenschaft 1 aus der Definition 2.2.2 erfüllt, gilt die ebenfalls für $\mathcal{F}$.

Jetzt zeigen wir, dass $\mathcal{F}$ die Eigenschaft 2 aus der Definition 2.2.2 erfüllt. Seien $(U,\varphi),(V,\psi)$ Karten aus $\mathcal{F}$. Wir zeigen, dass $\varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U\cap V) \to \varphi(U \cap V)$ eine C^k-Abbildung ist. Man kann dann ganz analog zeigen, dass $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$ eine C^k-Abbildung ist. Da φ und ψ Homöomorphismen sind, ist $\varphi \circ \psi^{-1}$ ebenfalls ein Homöomorphismus. Sei $p \in U \cap V$ und setze $x := \psi(p)$. Es existiert $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_0$ mit $p \in U_\alpha$. Die Menge $W := U_\alpha \cap U \cap V$ ist dann eine offene Umgebung von p und $\psi(W)$ ist damit eine offene Umgebung von x. Wir haben

$$\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(W)} = (\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}).$$

Das zeigt, dass $\varphi \circ \psi^{-1}$ in einer offenen Umgebung jedes Punkts von $\psi(U\cap V)$ eine C^k-Abbildung ist. Daher ist sie eine C^k-Abbildung auf $\psi(U \cap V)$.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{F}$ die Eigenschaft 3 aus der Definition 2.2.2 erfüllt. Sei (U,φ) eine beliebige Karte auf M mit der Eigenschaft, dass $\varphi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \varphi^{-1}$ für beliebiges $(V,\psi) \in \mathcal{F}$ C^k-Abbildungen sind. Insbesondere gilt dies dann für alle $(V,\psi) \in \mathcal{F}_0$. Daher gilt nach Definition von $\mathcal{F}$, dass (U,φ) zu der Familie $\mathcal{F}$ gehört.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ die einzige differenzierbare Struktur der Klasse C^k ist, die $\mathcal{F}_0$ beinhaltet. Sei $\mathcal{F}'$ eine weitere differenzierbare Struktur der Klasse C^k mit $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}'$. Dann sind, für $(U,\varphi) \in \mathcal{F}'$, die Abbildungen $\varphi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \varphi^{-1}$ für alle $(V,\psi) \in \mathcal{F}_0$ C^k-Abbildungen. Das zeigt $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Dies wiederum impliziert, dass für beliebiges $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$ die Abbildungen $\varphi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \varphi^{-1}$ für alle $(V,\psi) \in \mathcal{F}'$ C^k-Abbildungen sind. Daraus folgt, dass $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ da $\mathcal{F}'$ die Eigenschaft 3 aus der Definition 2.2.2 $\mathcal{F}$ erfüllt. Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. □

Bemerkung 2.2.9. Mit anderen Worten: Jeder Atlas der Klasse C^k für eine topologische Mannigfaltigkeit M induziert eine eindeutige differenzierbare Struktur der Klasse C^k auf M.

Definition 2.2.10. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.

- Sei $\mathcal{F}_0$ ein Atlas für M. Sei $\mathcal{F}$ die induzierte differenzierbare Struktur auf M. Eine Karte (U,φ) für M, die in $\mathcal{F}$ enthalten ist, heißt *kompatibel* mit $\mathcal{F}_0$.
- Zwei Atlanten für M, die dieselbe differenzierbare Struktur induzieren, heißen *kompatible Atlanten*.

Aufgabe 2.2.11. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Zwei Atlanten $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{G}_0$ sind genau dann kompatibel, wenn die Abbildungen $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ und $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ für alle $(U_\alpha,\varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_0$ und $(V_\beta,\psi_\beta) \in \mathcal{G}_0$ glatt sind.

Jetzt benutzen wir Proposition 2.2.8 um die Beispiele von topologischen Mannigfaltigkeiten, die wir bereits gesehen haben, mit einer differenzierbaren Struktur zu versehen.

Beispiel 2.2.12.

- $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ ist ein Atlas der Klasse C^∞ für $\mathbb{R}^n$. Die induzierte differenzierbare Struktur heißt die standard-differenzierbare Struktur auf $\mathbb{R}^n$. Die in Beispiel 2.1.7 eingeführte Polarkoordinatenkarte auf $\mathbb{R}^2$ ist kompatibel mit dem obigen Atlas (**Aufgabe**).

- Allgemeiner sei V ein n-dimensionaler Vektorraum (versehen mit der Standardtopologie). Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ eine Basis von V und betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n \qquad \sum_i \xi^i v_i \mapsto (\xi^1, \cdots, \xi^n),$$

  die tautologischerweise ein Homöoomorphismus ist. $\{(V, \varphi)\}$ ist dann ein Atlas der Klasse C^∞ für V. Die induzierte differenzierbare Struktur hängt nicht von Wahl der Basis ab: Sei $\mathcal{C}$ eine weitere Basis und sei $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$ der daraus resultierende Isomorphismus. Die Abbildungen $\varphi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \varphi^{-1}$ sind linear und damit glatt. Das zeigt, dass die Atlanten $\{(V, \varphi)\}$ und $\{(V, \psi)\}$ kompatibel sind und daher dieselbe differenzierbare Struktur auf V induzieren. Wir nennen die so erhaltene differenzierbare Struktur auf einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum die standard-differenzierbare Struktur auf dem Vektorraum.

Beispiel 2.2.13. Wir setzen $U := S^1 \setminus \{(1,0)\}$ und $V := S^1 \setminus (-1,0)$. Die Abbildungen

$$\gamma\colon (0, 2\pi) \to U \qquad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

und

$$\eta\colon (-\pi, \pi) \to V \qquad t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$$

sind stetig und bijektiv. Weiterhin ist es leicht zu sehen, dass sie offen sind. Daher sind sie Homöomophismen. Wir setzen $\varphi := \gamma^{-1}$ und $\psi := \eta^{-1}$. Es gilt

$$U \cap V = \{(x,y) \in S^1 | y > 0\} \sqcup \{(x,y) \in S^1 | y < 0\},$$
$$\varphi(U \cap V) = (0, \pi) \sqcup (\pi, 2\pi), \quad \psi(U \cap V) = (0, \pi) \sqcup (-\pi, 0).$$

Weiterhin berechnen wir

$$\varphi \circ \psi^{-1}(t) = \varphi \circ \eta(t) = \begin{cases} t, & \textit{falls } t \in (0, \pi) \\ t + 2\pi, & \textit{falls } t \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

und

$$\psi \circ \varphi^{-1}(t) = \psi \circ \gamma(t) = \begin{cases} t, & \textit{falls } t \in (0, \pi) \\ t - 2\pi, & \textit{falls } t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Damit sind die Abbildungen $\varphi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \varphi^{-1}$ glatt. Da zusätzlich $U \cup V = S^1$, ist die Familie $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ ein Atlas für S^1 und induziert eine differenzierbare Struktur.

Beispiel 2.2.14. Wir benutzen die Notation aus 2.1.8. Die Familie $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i \in \{1, \cdots, n+1\}}$ ist ein Atlas der Klasse C^∞ auf S^n (**Aufgabe**). Die induzierte differenzierbare Struktur auf S^n heißt die standard-differenzierbare Struktur auf S^n. Ein kompatibler Atlas ist gegeben durch die sogenannten stereographischen Projektionen. Sie werden wie folgt definiert:

Wir setzen $N := (0, \cdots, 0, 1), S := (0, \cdots, 0, -1), U_N := S^n \setminus \{N\}$ und $U_S := S^n \setminus \{S\}$. Für $x \in U_N$ schneidet die Gerade, die N und x verbindet, die Hyperebene

$$\{(x^1, \cdots, x^n, 0) | x^i \in \mathbb{R})\}$$

genau an einem Punkt, den wir mit $\varphi_N(x)$ bezeichnen. Die Abbildung

$$\varphi_N\colon U_N \to \mathbb{R}^n \qquad x \mapsto \varphi_N(x)$$

ist ein Homöomorphismus. Ähnlich definieren wir $\varphi_S\colon U_S \to \mathbb{R}^n$. $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ ist dann ein Atlas für S^n und die Atlanten $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ und $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}_{i \in \{1, \cdots, n+1\}}$ sind kompatibel (**Aufgabe**). Auf S^1 stimmt diese differenzierbare Struktur mit der differenzierbaren Struktur aus Beispiel 2.2.13 überein.

Beispiel 2.2.15. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $\mathcal{F}$ eine differenzierbare Struktur der Klasse C^k. Dann ist

$$\mathcal{F}|_U \coloneqq \{(V \cap U, \varphi|_V)|(V, \varphi) \in \mathcal{F}\}$$

eine differenzierbare Struktur der Klasse C^k auf U. So kann z. B. $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden (siehe Beispiel 2.1.9). Wir werden ab jetzt offene Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten der Klasse C^k immer mit dieser differenzierbaren Struktur versehen.

Beispiel 2.2.16. In diesem Beispiel zeigen wir, dass $\mathbb{RP}^n$ mit einer differenzierbaren Struktur der Klasse C^∞ versehen werden kann. Wir betrachten dazu den topologischen Raum $\mathbb{RP}^n$. In den Übungen haben Sie gesehen, dass dieser Raum Hausdorff ist. Um zu sehen, dass er zweitabzählbar ist, zeigen wir, dass die kanonische Abbildung $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ offen ist und benutzen die Beobachtung 3 aus Beispiel 1.1.37: Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ offen. Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bezeichnen wir mit $\varphi_\lambda\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ den Homöomorphismus $x \mapsto \lambda x$. Um zu zeigen, dass $\pi(U)$ offen ist, müssen wir zeigen, dass $\pi^{-1}(\pi(U))$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ offen ist. Es gilt aber

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \varphi_\lambda(U).$$

Da die Abbildungen φ_λ Homöomorphismen sind, sind die Mengen $\varphi_\lambda(U)$ offen. Die Menge $\pi^{-1}(\pi(U))$ ist dann als eine Vereinigung offener Mengen offen.

Wir bezeichnen mit $[(\xi^1, \cdots, \xi^{n+1})]$ die Äquivalenzklasse eines Punkts $(\xi^1, \ldots, \xi^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir setzen

$$U_i \coloneqq \{[(\xi^1, \ldots, \xi^{n+1})] \in \mathbb{RP}^n | \xi^i \neq 0\}$$

und definieren

$$\varphi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n \qquad [(\xi^1, \ldots, \xi^{n+1})] \mapsto (\frac{\xi^1}{\xi^i}, \ldots \frac{\xi^{i-1}}{\xi^i}, \frac{\xi^{i+1}}{\xi^i}, \ldots \frac{\xi^{n+1}}{\xi^i}).$$

Man beachte, dass die Wahl des Repräsentanten in der obigen Definition keine Rolle spielt. Es ist leicht zu sehen, dass die Abbildungen φ_i Homöomorphismen sind und dass $\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i \in \{1, \cdots, n+1\}} U_i$. $\mathbb{RP}^n$ ist daher eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Darüber hinaus ist die Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \{1, \cdots, n+1\}}$ ein Atlas der Klasse C^∞ (**Aufgabe**). Wir werden $\mathbb{RP}^n$ immer mit der durch diesen Atlas induzierten differenzierbaren Struktur versehen.

Beispiel 2.2.17. Seien $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen ein Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ ein *k-Rahmen* in $\mathbb{R}^n$, falls die Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig sind. Wir bezeichnen die Menge der k-Rahmen in $\mathbb{R}^n$ mit $F(k, n)$. Diese Menge kann in einer natürlichen Weise als eine Teilmenge der Menge der $n \times k$-Matrizen $\mathrm{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$ gesehen werden, in dem wir das Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ als eine Matrix betrachten. Die Elemente von $F(k, n)$ sind genau die Matrizen in $\mathrm{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$ von Rang k. Diese Teilmenge ist offen: Eine $n \times k$-Matrix hat Rang k genau dann, wenn mindestens eine ihrer $k \times k$-Untermatrizen eine nichtverschwindende Determinante hat. Anders gesagt: Das Komplement von $F(k, n)$ ist der Schnitt der Nullstellenmengen der Unterdeterminantenabbildungen und damit abgeschlossen. Wenn wir den Vektorraum $\mathrm{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$ mit ihrer standard-differenzierbaren Struktur versehen, erhalten wir eine differenzierbare Struktur auf $F(k, n)$. Die Menge der k-Rahmen in $\mathbb{R}^n$ hat damit eine Mannigfaltigkeitsstruktur.

Beispiel 2.2.18. Die Menge

$$V(k,n) := \{(x_1,\dots,x_k) \in F(k,n) | \{x_1,\dots,x_k\} \textit{ ist eine orthonormale Menge}\},$$

versehen mit der Teilraumtopologie, ist eine topologische Mannigfaltigkeit. Sie kann in einer natürlichen Weise mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden und heißt die *Stiefel-Mannigfaltigkeit*.

Beispiel 2.2.19. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Wir bezeichnen mit $G(k,n)$ die Menge der k-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Betrachte die Abbildung

$$\pi \colon F(k,n) \to G(k,n) \qquad (x_1,\cdots,x_k) \mapsto \operatorname{Span}\{x_1,\cdots,x_k\}.$$

Die Abbildung π ist offensichtlich surjektiv. Die Menge $G(k,n)$, versehen mit der Quotiententopologie, ist eine topologische Mannigfaltigkeit. Sie kann in einer natürlichen Weise mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden. Die resultierende Mannigfaltigkeit heißt die *Graßmann-Mannigfaltigkeit*. Wir bemerken, dass die Abbildung

$$\mathbb{RP}^{n-1} \to G(1,n) \qquad [x] \mapsto \operatorname{Span}\{x\}$$

ein Homöomorphismus ist.

Beispiel 2.2.20.

- Seien M und N topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Seien $\mathcal{F}_M = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ und $\mathcal{F}_N = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in I}$ differenzierbare Strukturen der Klasse C^k. $M \times N$, versehen mit der Produkttopologie, ist eine topologische Mannigfaltigkeit. Weiterhin ist die Familie

  $$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta) | (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_M, (V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{F}_N\}$$

  ein Atlas der Klasse C^k auf $M \times N$. Im Folgenden wird $M \times N$ immer mit der so definierten differenzierbaren Struktur versehen.

- Mittels der obigen Konstruktion können wir glatte differenzierbare Strukturen auf dem Zylinder $\mathbb{R}\times S^1$ und dem n-dimensionalen Torus $T^n := \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{-}times}$ definieren.

Bemerkung 2.2.21. Wir formulieren jetzt einige natürliche Fragen rund um differenzierbare Strukturen.

- Besitzt eine topologische Mannigfaltigkeit immer eine differenzierbare Struktur? In [1] hat Kervaire eine negative Antwort auf diese Frage gegeben.

- Kann eine topologische Mannigfaltigkeit mehr als eine differenzierbare Struktur besitzen? Ja. $\mathbb{R}$ besitzt unendlich viele differenzierbare Strukturen. Im Fall von $\mathbb{R}$ ergeben diese differenzierbare Strukturen aber diffeomorphe Mannigfaltigkeiten (**Aufgabe**). Siehe Definition 2.4.15 für die Definition eines Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten.

- Das vorherige Beispiel widerlegt nicht die Existenz von unterschiedlichen differenzierbaren Strukturen auf $\mathbb{R}$, die nichtdiffeomorphe Mannigfaltigkeiten ergeben. Daher ist die folgende Frage natürlich: Kann eine topologische Mannigfaltigkeit mehrere differenzierbare Strukturen besitzen, die zu nichtdiffeomorphen Mannigfaltigkeiten führen. In [3] hat Milnor gezeigt, dass mehrere differenzierbare Strukturen auf S^7 existieren, die nichtdiffeomorphe Mannigfaltigkeiten ergeben. In [2] zeigen Kervaire und Milnor u. a., dass das gleiche Phänomen auch bei anderen Sphären auftreten kann. Im Fall von S^4 ist diese Frage offen. Auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \neq 4$ gibt es genau eine differenzierbare Struktur (bis auf Diffeomorphismus). Auf $\mathbb{R}^4$ gibt es unendlich viele differenzierbare Strukturen, die nichtdiffeomorphe Mannigfaltigkeiten ergeben.

2.3 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Wie schon erwähnt, ist eins unserer Ziele in diesem Kurs die Verallgemeinerung der Konzepte und Methoden der Analysis auf allgemeinere Räume. Wir haben bis jetzt eine Klasse von solchen Räumen gesehen, die sich für diese Verallgemeinerung anbieten. Einige topologische Räume, die auf den ersten Blick auch geeignet scheinen, sind aber von der Klasse der (topologischen) Mannigfaltigkeiten ausgeschlossen. Z. B. ist der abgeschlossene Ball $\overline{B_r(0)}$ mit Radius r und Zentrum 0 (Disk) in $\mathbb{R}^n$ keine topologische Mannigfaltigkeit, da man keine offene Umgebung der Randpunkte finden kann, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist (kann man mittels algebraischer Topologie beweisen). Die abgeschlossene obere und untere Hemisphäre in S^n sind auch keine topologischen Mannigfaltigkeiten (sie sind homöomorph zum $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$). Der abgeschlossene obere Halbraum $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{H}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n \geq 0\},$$

ist auch keine topologische Mannigfaltigkeit. Wir führen jetzt eine größere Klasse von topologischen Räumen ein, die sowohl diese Räume als auch die topologische Mannigfaltigkeiten beinhalten.

Definition 2.3.1. Ein zweitabzählbarer Hausdorffraum M heißt eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand*, falls für jeden Punkt p eine offene Umgebung U und ein Homöomorphismus $\varphi \colon U \to V$ existiert, wobei V eine offene Teilmenge von $\mathbb{H}^n$ ist.

Bemerkung 2.3.2. Seien U und φ wie in Definition 2.3.1. Wie für topologische Mannigfaltigkeiten nennen wir φ eine *Koordinatenabbildung* und (U, φ) ein *Koordinatensystem* oder eine *Karte*. Weiterhin bezeichnen wir die Abbildungen $r^i \circ \varphi$ als die *Koordinatenfunktionen* der Karte (U, φ).

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\partial\mathbb{H}^n$ die Menge

$$\{(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n\}$$

und bemerken, dass die Abbildung

$$\partial\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{n-1} \qquad (x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \mapsto (x^1, \dots, x^{n-1})$$

ein Homöomorphismus ist.

Beispiel 2.3.3. $\mathbb{H}^n$, $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$, $[0,1] \times S^n$ und die Hemisphären

$$S^n_{+(-)} = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n | x^{n+1} \geq (\leq) 0\}$$

sind topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand (**Aufgabe**).

Beispiel 2.3.4. Sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $U \subset M$ offen. Dann ist U auch eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand (vgl. Beispiel 2.1.9).

Definition 2.3.5. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand.

- Ein Punkt $p \in M$ heißt ein *innerer Punkt*, falls eine Karte (U, φ) für M mit $p \in U$ existiert, sodass $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^n$.

- Ein Punkt $p \in M$ heißt ein *Randpunkt*, falls eine Karte (U, φ) für M mit $p \in U$ existiert, sodass $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$.

Bemerkung 2.3.6. Nach Definition, ist jeder Punkt einer topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand M entweder ein innerer Punkt oder ein Randpunkt. Es ist aber auf den ersten Blick nicht klar, ob ein Punkt von M sowohl ein innerer Punkt als auch ein Randpunkt sein kann. Dass das nicht der Fall sein kann, kann auch mittels algebraischer Topologie bewiesen werden.

Definition 2.3.7. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand.

- Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das *Innere* von M und wird mit M° bezeichnet.
- Die Menge aller Randpunkte von M heißt der *Rand* von M und wird mit ∂M bezeichnet.

Bemerkung 2.3.8. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Wegen Bemerkung 2.3.6 sind M° und ∂M disjunkt und es gilt $M = M^\circ \cup \partial M$.

Beispiel 2.3.9. Falls Sie die Aufgabe in Beispiel 2.3.3 gelöst haben, dann wissen Sie, dass

- der Rand von $\mathbb{H}^n$ genau die oben definierte Menge $\partial\mathbb{H}^n = \{(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n\}$ ist. Das Innere von $\mathbb{H}^n$ ist das Komplement von $\partial\mathbb{H}^n$:
$$(\mathbb{H}^n)^\circ = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n > 0\}.$$
- der Rand von $\overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$ die $n-1$-dimensionale Sphäre S^{n-1} ist. Das Innere von $\overline{B_r(0)}$ ist der offene r-Ball $B_r(0)$.
- der Rand von $[0,1] \times S^n$ die Vereinigung $\{0\} \times S^n \cup \{1\} \times S^n$ ist. Das Innere von $[0,1] \times S^n$ ist $(0,1) \times S^n$.
- der Rand von S^n_+ die $n-1$-dimensionale Sphäre S^{n-1} ist, wobei wir die Identifikation
$$\{(x^1, \ldots, x^n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}\} \to \mathbb{R}^n \qquad (x^1, \ldots, x^n, 0) \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$$
benutzt haben. Damit gilt
$$(S^n_+)^\circ = \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n | x^{n+1} > 0\}.$$

Bemerkung 2.3.10. Beispiel 2.3.9 zeigt, dass der in Definition 2.3.5 eingeführte Begriff „das Innere“ nicht mit dem in Definition 1.1.5 eingeführten punktmengetopologischen Inneren übereinstimmt. Letzteres bezeichnen wir daher ab jetzt als das *topologische Innere*. In der Tat: Das topologische Innere von S^n_+, betrachtet als eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$, ist leer. Manchmal stimmen die beiden Begriffe überein. Das topologische Innere von $\overline{B_r(0)}$, betrachtet als eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, ist $B_r(0)$. Aber selbst hier muss man vorsichtig sein. Das topologische Innere von $\overline{B_r(0)}$, betrachtet als eine Teilmenge von sich selbst, ist $\overline{B_r(0)}$.

Aufgabe 2.3.11. Sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Dann ist M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \emptyset$.

Lemma 2.3.12. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. M° ist offen in M (und ∂M ist abgeschlossen in M).*

Beweis. Sei $p \in M^\circ$. Sei (U, φ) eine Karte von M mit $p \in U$. Dann gilt $\varphi(p) \notin \partial\mathbb{H}^n$ und es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(\varphi(p)) \subset (\mathbb{H}^n)^\circ \cap \varphi(U)$. $\varphi^{-1}(B_\epsilon(\varphi(p)))$ ist dann eine offene Teilmenge von M, die in M° enthalten ist. Die Behauptung folgt. □

Proposition 2.3.13. *Sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand.*

1. *Das Innere M° von M ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.*

2. *Der Rand ∂M von M ist eine $n-1$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.*

Beweis.

1. Sei $p \in M^\circ$. Sei (U, φ) eine Karte von M mit $p \in U$. Die Menge $V := U \cap M^\circ$ ist wegen Lemma 2.3.12 eine offene Teilmenge von M. Da V in M offen ist, ist $\varphi(V)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{H}^n$, die, nach Definition von V, in $(\mathbb{H}^n)^\circ$ enthalten ist. Damit ist $\varphi(V)$ eine offene Teilmenge $(\mathbb{H}^n)^\circ$. Da $(\mathbb{H}^n)^\circ$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist, ist $\varphi(V)$ auch in $\mathbb{R}^n$ offen. Nach Definition der Teilraumtopologie ist V eine offene Teilmenge von M°. Da φ ein Homöomorphismus ist, ist $\varphi|_V \colon V \to \varphi(V)$ ein Homöomorphismus. Damit ist $(V, \varphi|_V)$ eine Karte für M°.

2. Sei $p \in \partial M$. Sei (U, φ) eine Karte von M mit $p \in U$. Dann gilt $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. Die Menge $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$ ist eine offene Teilmenge von $\partial\mathbb{H}^n$, die wir mittels des Homöomorphismus
$$\partial\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{n-1} \qquad (x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \mapsto (x^1, \dots, x^{n-1})$$
als eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$ betrachten. Wir setzen $V := \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n)$. V ist dann eine offene Teilmenge von ∂M und (V, φ_V) ist eine Karte für ∂M. □

Um z. B. Begriffe wie Glattheit von Funktionen auf topologischen Mannigfaltigkeiten mit Rand zu definieren, verallgemeinern wir das Konzept einer differenzierbaren Struktur auf topologischen Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Definition 2.3.14. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine *differenzierbare Struktur der Klasse C^k* auf M ist eine Familie $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ von Karten auf M mit den folgenden Eigenschaften:

1. $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.

2. Für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ sind
$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \colon \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), \qquad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
C^k-Abbildungen.

3. $\mathcal{F}$ ist maximal bezüglich der Eigenschaft 2; d. h. falls (U, φ) eine Karte auf M ist, sodass $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ und $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ für alle $\alpha \in \Lambda$ C^k-Abbildungen sind, dann gilt $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Bemerkung 2.3.15. Der einzige Unterschied zwischen den beiden Definitionen 2.2.2 und 2.3.14 ist, dass in Definition 2.3.14 die Definitionsbereiche der Kartenwechselabbildungen nicht notwendigerweise offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind. Daher ist die Glattheit der Kartenwechselabbildungen in Definition 2.3.14 im Sinne der Bemerkung 1.2.17 zu verstehen.

Definition 2.3.16. Ein Paar $(M, \mathcal{F})$, wobei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist und $\mathcal{F}$ eine differenzierbare Struktur der Klasse C^k auf M ist, heißt eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand der Klasse* C^k.

Bemerkung 2.3.17. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand der Klasse C^∞ werden auch *glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand* genannt. Da wir hauptsächlich im glatten Kontext arbeiten, nennen wir sie häufiger einfach *Mannigfaltigkeiten mit Rand*.

Bemerkung 2.3.18. Ein Atlas für eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand wird analog zur Definition 2.2.7 definiert. Mann kann dann analog zur Proposition 2.2.8 zeigen, dass jeder Atlas auf einer topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand in genau einer differenzierbaren Struktur enthalten ist.

Beispiel 2.3.19. $\{(\mathbb{H}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{H}^n})\}$, wobei $\mathrm{id}_{\mathbb{H}^n}$ die Identitätsabbildung auf $\mathbb{H}^n$ bezeichnet, ist ein Atlas für $\mathbb{H}^n$. Die induzierte glatte differenzierbare Struktur heißt die standard-differenzierbare Struktur auf $\mathbb{H}^n$.

Aufgabe 2.3.20. Definieren Sie differenzierbare Strukturen auf den topologischen Mannigfaltigkeiten mit Rand, die in Beispiel 2.3.3 vorkommen.

2.4 Differenzierbare Abbildungen auf Mannigfaltigkeiten

Bei den bisherigen Versuchen Glattheit zu definieren, sind wir auf Probleme gestoßen. Wir werden nun sehen, dass diese nach der Wahl einer differenzierbaren Struktur verschwinden. Als Nächstes werden wir sehen, dass diese Probleme nach der Wahl einer differenzierbaren Struktur verschwinden.

Definition 2.4.1. Seien $(M, \mathcal{F}_M)$ und $(N, \mathcal{F}_N)$ Mannigfaltigkeiten der Klasse C^k. Sei $l \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq l \leq k$. Eine stetige Abbildung $F\colon M \to N$ heißt eine C^l-*Abbildung*, falls für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_M$ und $(V, \psi) \in \mathcal{F}_N$, die Abbildung

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \to \psi(F(U) \cap V)$$

eine C^l-Abbildung ist.

Bemerkung 2.4.2.

- Wir haben das Konzept der Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten nur für stetige Abbildungen definiert. Differenzierbare Abbildungen sind also nach Definition stetig.
- Falls, in Definition 2.4.1, $k = l = \infty$, dann nennen wir F auch eine *glatte Abbildung*.
- Wir reservieren den Begriff „Funktion“ für Abbildungen mit Bildbereich $\mathbb{R}$. Mit „eine glatte Funktion F auf einer Mannigfaltigkeit M“ meinen wir also eine glatte Abbildung $F\colon M \to \mathbb{R}$ im Sinne der Definition 2.4.1. Wir versehen $\mathbb{R}$ immer mit ihrer standard-differenzierbaren Struktur.

Bemerkung 2.4.3. Die Abbildung $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, in der Situation von Definition 2.4.1, heißt die *Koordinatendarstellung* der Abbildung F in den Koordinatensystemen (U, φ) und (V, ψ).

Bemerkung 2.4.4. Seien $(M, \mathcal{F}_M)$ und $(N, \mathcal{F}_N)$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand der Klasse C^k. Für $0 \leq l \leq k$, heißt eine stetige Abbildung $F\colon M \to N$ eine C^l-Abbildung, falls für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{F}_M$ und $(V, \psi) \in \mathcal{F}_N$, die Abbildung

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \to \psi(F(U) \cap V)$$

eine C^l-Abbildung ist. Der einzige Unterschied zur Definition 2.4.1 ist, dass der Definitionsbereich von $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ jetzt eine offene Teilmenge von $\mathbb{H}^n$ ist. Insbesondere ist er nicht immer offen in $\mathbb{R}^n$. In diesem Fall ist die Glattheit im Sinne der Bemerkung 1.2.17 zu verstehen.

Es ist fast nie möglich, die Bedingung der Definition 2.4.1 direkt für alle Karten in den differenzierbaren Strukturen von M und N zu überprüfen. Die folgende Proposition gibt eine praktische Methode zur Verifizierung der Differenzierbarkeit von Abbildungen.

Proposition 2.4.5. *Seien M und N (glatte) Mannigfaltigkeiten und seien $(\mathcal{F}_M)_0$ und $(\mathcal{F}_N)_0$ Atlanten auf M bzw. N. Wir versehen M und N mit den durch $(\mathcal{F}_M)_0$ und $(\mathcal{F}_N)_0$ induzierten differenzierbaren Strukturen. Sei $F\colon M \to N$ eine stetige Abbildung. Die Abbildung F ist glatt genau dann, wenn für alle $(U, \varphi) \in (\mathcal{F}_M)_0$ und $(V, \psi) \in (\mathcal{F}_N)_0$, die Abbildung*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \to \psi(F(U) \cap V)$$

glatt ist.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}_M$ und $\mathcal{F}_N$ die differenzierbaren Strukturen, die durch $(\mathcal{F}_M)_0$ und $(\mathcal{F}_N)_0$ induziert werden. Falls F glatt ist, dann gilt

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \to \psi(F(U) \cap V) \tag{$*$}$$

für alle $(U, \varphi) \in (\mathcal{F}_M)_0$ und $(V, \psi) \in (\mathcal{F}_N)_0$, da $(\mathcal{F}_M)_0 \subset \mathcal{F}_M$ und $(\mathcal{F}_N)_0 \subset \mathcal{F}_N$. Sei nun umgekehrt F so, dass die Glattheit von $(*)$ für alle $(U, \varphi) \in (\mathcal{F}_M)_0$ und $(V, \psi) \in (\mathcal{F}_N)_0$ gilt. Seien $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi}) \in \mathcal{F}_M$ und $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi}) \in \mathcal{F}_N$. Wir müssen zeigen, dass

$$\widetilde{\psi} \circ F \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\colon \varphi(F^{-1}(\widetilde{V}) \cap \widetilde{U}) \to \psi(F(\widetilde{U}) \cap \widetilde{V})$$

glatt ist. Falls $F^{-1}(\widetilde{V}) \cap \widetilde{U} = \emptyset$, gibt es nichts zu zeigen. Sei $p \in F^{-1}(\widetilde{V}) \cap \widetilde{U}$. Wir wählen Karten $(U', \varphi') \in (\mathcal{F}_M)_0$ mit $p \in U'$ und $(V', \psi') \in (\mathcal{F}_N)_0$ mit $F(p) \in V'$. Wir setzen $W = F^{-1}(\widetilde{V} \cap V') \cap (\widetilde{U} \cap U')$. Dann gilt

$$\widetilde{\psi} \circ F \circ \widetilde{\varphi}^{-1}|_{\varphi(W)} = (\widetilde{\psi} \circ (\psi')^{-1}) \circ (\psi' \circ F \circ (\varphi')^{-1}) \circ (\varphi' \circ \widetilde{\varphi}^{-1})|_{\varphi(W)}.$$

Das Argument zeigt, dass $\widetilde{\psi} \circ F \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ in einer offenen Umgebung jedes Punkts von $\varphi(F^{-1}(\widetilde{V}) \cap \widetilde{U})$ glatt ist. Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 2.4.6. Wir haben die Proposition 2.4.5 im C^∞-Kontext formuliert und bewiesen. Die allgemeinere Aussage im C^k-Kontext gilt und wird analog bewiesen. Weiterhin, gilt die analoge Aussage für Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Bemerkung 2.4.7. Aus Proposition 2.4.5 folgt, dass falls M und N offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ (, versehen mit den standard-differenzierbaren Strukturen,) sind und $F\colon M \to N$ eine stetige Abbildung ist, dann ist F eine C^k-Abbildung im Sinne der Definition 2.4.1 genau dann, wenn sie eine C^k-Abbildung im Sinne der Definition 1.2.5 und 1.2.8 ist. Das folgt sofort, wenn man in Proposition 2.4.5 $(\mathcal{F}_M)_0 \coloneqq \{(M, \mathrm{id}_M)\}$ und $(\mathcal{F}_N)_0 \coloneqq \{(N, \mathrm{id}_N)\}$ setzt, wobei $\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N$ die Identitätsabbildungen auf M bzw. N bezeichnen.

Bemerkung 2.4.8. Wenn wir über Karten für eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit reden, meinen wir ab jetzt Karten, die in der gewählten differenzierbaren Struktur enthalten sind.

Beispiel 2.4.9. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei U eine offene Teilmenge von M versehen mit der differenzierbaren Struktur, die sie von M erbt. Die Inklusionsabbildung $\iota\colon U \to M$ ist glatt. In der Tat: ι ist stetig und die Abbildung

$$\psi \circ \iota \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(V \cap W) \to \psi(V \cap W)$$

ist für beliebige Karten (V, ψ) und (W, φ) von U bzw. M glatt. Das liegt daran, dass (V, ψ) gleichzeitig eine Karte für M ist und $\psi \circ \iota \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$, welche wegen Kompatibilität der Karten in einer (glatten) differenzierbaren Struktur glatt ist.

Beispiel 2.4.10. Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n \qquad (\xi^1, \ldots, \xi^{n+1}) \mapsto [(\xi^1, \ldots, \xi^{n+1})]$$

glatt ist. Wir benutzen hier die Notation und den Atlas für $\mathbb{RP}^n$, die im Beispiel 2.2.16 eingeführt wurden. Auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ betrachten wir den Atlas $\{(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}})\}$, wobei $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$ die Identitätsabbildung auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ bezeichnet. Die Abbildung

$$\varphi_i \circ \pi \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}})^{-1}\colon\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}(\pi^{-1}(U_i) \cap \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \pi^{-1}(U_i) =$$

$$\{(\xi^1, \cdots, \xi^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} | \xi^i \neq 0\} \to \varphi_i(\pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \cap U_i) = \varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$\varphi_i \circ \pi \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}})^{-1}((\xi^1, \ldots, \xi^{n+1})) = \varphi_i \circ \pi((\xi^1, \ldots, \xi^{n+1})) =$$

$$\varphi([(\xi^1, \ldots, \xi^{n+1})]) = (\frac{\xi^1}{\xi^i}, , \ldots \frac{\xi^{i-1}}{\xi^i}, \frac{\xi^{i+1}}{\xi^i}, \ldots \frac{\xi^{n+1}}{\xi^i})$$

und ist damit glatt. Daraus folgt, dass π glatt ist.

Aufgabe 2.4.11. Seien M, N und P Mannigfaltigkeiten.

1. Seien $F\colon M \to N$ und $G\colon N \to P$ glatt. Dann ist $G \circ F$ glatt.

2. Sei $H\colon M \to N$ eine nicht notwendigerweise stetige Abbildung. Zeigen Sie: H ist glatt genau dann, wenn für alle $p \in M$ eine offene Umgebung U existiert, sodass $H|_U\colon U \to N$ glatt ist. Hier versehen wir die Menge U mit der differenzierbaren Struktur, die sie als offene Teilmenge von M erbt.

Aufgabe 2.4.12. Seien M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten. Betrachte die Mannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$ (siehe Beispiel 2.2.20). Wir bezeichnen mit π_i die kanonischen Projektionen $M_1 \times M_2 \to M_i$.

1. Zeigen Sie, dass π_i für $i \in \{1, 2\}$ glatt ist.

2. Sei N eine weitere Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $F\colon N \to M_1 \times M_2$ glatt ist genau dann, wenn $\pi_1 \circ F$ und $\pi_2 \circ F$ glatt sind.

Aufgabe 2.4.13. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen glatt sind. Alle Mannigfaltigkeiten haben ihre oben definierte „standard“-differenzierbare Strukturen.

1. Die Inklusion $\iota\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.
2. Die Einschränkung der Abbildung π aus 2.4.10 auf S^n, $\pi|_{S^n}\colon S^n \to \mathbb{RP}^n$.
3. Die Abbildung

$$p\colon \mathbb{R}^n \to T^n \qquad (\xi^1, \ldots, \xi^n) \mapsto (e^{i\xi^1}, \ldots, e^{i\xi^n}),$$

   wobei T^n der n-dimensionale Torus ist (siehe Beispiel 2.2.20) und wir die kanonische Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ benutzt haben, um S^1 als eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ zu betrachten.

Bemerkung 2.4.14. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $C^\infty(M)$ die Menge der glatten ($\mathbb{R}$-wertigen) Funktionen auf M. Die Menge $C^\infty(M)$ ist unter Addition und Multiplikation abgeschlossen, da die Koordinatendarstellung der Addition und Multiplikation von Funktionen durch die Addition bzw. Multiplikation der Koordinatendarstellungen gegeben ist. Es ist leicht zu sehen, dass $C^\infty(M)$ mit diesen Operationen und mit der Operation der Skalar-Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{R}$ eine Algebra ist; d. h. gleichzeitig ein Vektorraum und ein Ring und so, dass die unterschiedlichen Operationen miteinander kompatibel sind.

Definition 2.4.15. Seien M und N (glatte) Mannigfaltigkeiten (eventuell mit Rand). Eine glatte Abbildung $F\colon M \to N$ heißt ein *(glatter) Diffeomorphismus*, falls F bijektiv ist und ihre Inverse $F^{-1}\colon N \to M$ glatt ist. Wir nennen M und N *diffeomorph* zueinander, falls ein Diffeomorphismus $F\colon M \to N$ existiert.

Bemerkung 2.4.16. Es ist leicht zu sehen, dass eine Verkettung von Diffeomorphismen wieder ein Diffeomorphismus ist.

Beispiel 2.4.17. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $(U, \varphi\colon U \to V)$ eine Karte für M (die in der gewählten differenzierbaren Struktur enthalten ist). U und V sind als offene Teilmengen von M bzw. $\mathbb{R}^n$ in einer natürlichen Weise Mannigfaltigkeiten. Ein Atlas für V ist $\{(V, \mathrm{id}_V)\}$, wobei id_V die Identitätsabbildung auf V ist. Die Abbildung $\varphi\colon U \to V$ ist nach Definition ein Homöomorphismus (und damit stetig und bijektiv). Weiterhin sind die Abbildungen φ und φ^{-1} im Sinne der Definition 2.4.1 glatt, da für alle Karten (W, ψ) von U die Abbildungen

$$\mathrm{id}_V \circ \varphi \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$$

und

$$\psi \circ \varphi^{-1} \circ \mathrm{id}_V^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1},$$

wegen Kompatibilität von φ und ψ, glatt sind. Wir haben gezeigt, dass Karten Diffeomorphismen sind.

Seien nun umgekehrt U und V offene Teilmengen von M bzw. $\mathbb{R}^n$ und sei $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus im Sinne der Definition 2.4.1. Dann ist φ insbesondere ein Homöomorphimus und es gilt für alle Karten (W, ψ) von U, dass die Abbildungen

$$\mathrm{id}_V \circ \varphi \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$$

und

$$\psi \circ \varphi^{-1} \circ \mathrm{id}_V^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$$

glatt sind. Das bedeutet, dass (U, φ) eine Karte für M ist (die in der gewählten differenzierbaren Struktur enthalten ist).

Proposition 2.4.18. *Seien M und N diffeomorphe Mannigfaltigkeiten. Dann gilt* $\dim M = \dim N$.

Beweis. Sei $F\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus. Für beliebige Karten (U, φ) und (V, ψ) für M bzw. N ist die Abbildung

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \colon \mathbb{R}^{\dim M} \supset \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(U \cap F^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^{\dim N}$$

als eine Verkettung von Diffeomorphismen wieder ein Diffeomorphismus (siehe Bemerkung 2.4.16 und 2.4.17). Ihre Differential ist an jeder Stelle $x \in \varphi(U \cap F^{-1}(V))$ eine invertierbare lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{\dim M}$ nach $\mathbb{R}^{\dim N}$. Daraus folgt, dass $\dim M = \dim N$. □

Aufgabe 2.4.19. Finden Sie unendlich viele (glatte) differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$ versehen mit ihrer Standardtopologie und zeigen Sie, dass die resultierenden glatte Mannigfaltigkeiten zueinander diffeomorph sind.

2.5 Zerlegungen der Eins

In diesem Abschnitt zeigen wir die Existenz von Zerlegungen der Eins auf Mannigfaltigkeiten (mit Rand). Zerlegungen der Eins sind ein wichtiges Werkzeug, das uns erlaubt, lokale „Strukturen“ und Funktionen zusammenzusetzen, um globale Strukturen und Funktionen auf der Mannigfaltigkeit zu definieren. Umgekehrt erlauben sie uns, globale Strukturen und Funktionen als lokal endliche Summen von lokalen Strukturen zu schreiben. Das ermöglicht uns z. B. Integration von Funktionen (präziser Differentialformen) auf Mannigfaltigkeiten zu definieren: Dazu zerlegen wir Funktionen in Summen von Funktionen, deren Träger in Kartengebieten enthalten sind. Auf diesen Kartengebieten können wir einen Integrationsbegriff mithilfe der Lebesgue-Integration auf $\mathbb{R}^n$ einführen.

Definition 2.5.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ von Teilmengen von X heißt *lokal endlich*, falls für jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von X existiert, sodass $U_x \cap A_\alpha \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $\alpha \in \Lambda$ gilt.

Beispiel 2.5.2. Die Familie $\{B_r(0)\}_{r\in\mathbb{R}_+}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist nicht lokal endlich, da jede Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ alle (unendlich viele) Elemente der Familie schneidet.

Bemerkung 2.5.3. Sei X ein topologischer Raum und sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Im Folgenden bezeichnen wir den *Träger* von f mit $\operatorname{supp} f$. Es gilt also:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}$$

Definition 2.5.4. Sei M eine Mannigfaltigkeit.

- Eine Familie $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset C^\infty(M)$ heißt eine *Zerlegung der Eins*, falls
  1. ψ_α ist eine nicht-negative Funktion für alle $\alpha \in \Lambda$; d. h. $\psi_\alpha(p) \geq 0$ für alle $p \in M$,
  2. $\{\operatorname{supp} \psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine lokal endliche Familie ist und
  3. $\sum_{\alpha\in\Lambda} \psi_\alpha(p) = 1$ für alle $p \in M$.
- Sei $\{U_\beta\}_{\beta\in I}$ eine Überdeckung von M. Eine Zerlegung der Eins $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ heißt eine Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $\{U_\beta\}_{\beta\in I}$, falls für jedes $\alpha \in \Lambda$ ein $\beta \in I$ existiert mit $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subset U_\beta$

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es, das folgende Theorem zu beweisen.

Theorem 2.5.5 (Existenz von Zerlegungen der Eins)**.** *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert eine abzählbare Zerlegung der Eins $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ mit der Eigenschaft, dass $\operatorname{supp}\psi_i$ für alle $i\in\mathbb{N}$ kompakt ist. Falls wir die Kompaktheit der Träger nicht fordern, können wir eine Zerlegung der Eins $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bezüglich $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ finden mit $\operatorname{supp}\eta_\alpha\subset U_\alpha$ für jedes $\alpha\in\Lambda$.*

Wir beweisen zuerst zwei Lemmas.

Lemma 2.5.6. *Sei X ein lokalkompakter, zweitabzählbarer Hausdorffraum. Dann existiert eine Familie $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von offenen Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$\overline{G_i}$ ist für jedes $i\in\mathbb{N}$ kompakt.*
2. *$\overline{G_i}\subset G_{i+1}$.*
3. *$X=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}G_i$.*

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Basis für die Topologie von X mit der Eigenschaft, dass $\overline{U_i}$ für alle $i\in\mathbb{N}$ kompakt ist (siehe Proposition 1.1.62 und ihren Beweis für die Existenz solcher Basen).

Wir setzen $G_1 := U_1$ und definieren G_i für $i\geq 2$, rekursiv, wie folgt: Sei $G_k=\bigcup_{n=1}^{j_k}U_n$ für ein $j_k\in\mathbb{N}$. Da $\overline{G_k}=\bigcup_{n=1}^{j_k}\overline{U_n}$ und endliche Vereinigungen kompakter Mengen kompakt sind, ist $\overline{G_k}$ kompakt. Damit ist diese Menge in einer endlichen Vereinigung der Mengen aus $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ enthalten. Sei j_{k+1} die kleinste natürliche Zahl, sodass $\overline{G_k}\subset\bigcup_{n=1}^{j_{k+1}}U_n$. Wir setzen

$$G_{k+1}=\bigcup_{n=1}^{j_{k+1}}U_n.$$

Die Familie $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist die gesuchte Familie. □

Lemma 2.5.7. *Es existiert eine nicht-negative glatte Funktion τ auf $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\tau(x)=1$ für alle $x\in\overline{C_1(0)}$ und $\tau(x)=0$ für alle $x\notin C_2(0)$. Hier bezeichnet $C_r(0)$ den offenen Kubus um 0 mit der Seitenlänge $2r$.*

Beweis. Betrachte die Funktion

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad t\mapsto\begin{cases}e^{-\frac{1}{t}} & \textit{falls } t>0\\ 0 & \textit{falls } t\leq 0\end{cases}.$$

Wir definieren

$$g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad t\mapsto\frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$$

und

$$h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad t\mapsto g(t+2)g(2-t).$$

Die Funktion h ist glatt, nicht-negativ, konstant gleich 1 auf $[-1,1]$ und verschwindet außerhalb von $(-2,2)$. Die Funktion $\tau:=(h\circ r^1)\cdots(h\circ r^n)$ hat die in der Aussage beschriebenen Eigenschaften. Hier bezeichnet $r^i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, wie immer, die i-te standard-Koordinatenfunktion. □

Bemerkung 2.5.8. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei (V, φ) eine zentrierte Karte um p mit $\varphi(V) \supset \overline{C_2(0)}$. Sei τ wie in Lemma 2.5.7 und betrachte die Funktion

$$\tau_p(q) = \begin{cases} (\tau \circ \varphi)(q) & \textit{für } q \in V \\ 0 & \textit{für } q \notin V. \end{cases}.$$

Die Funktion τ_p ist glatt: Wir zeigen, dass für alle $q \in M$ eine offene Umgebung U_q von q existiert, sodass $\tau_p|_{U_q}$ glatt ist.

- Falls $q \in V$, wählen wir $U_q := V$. $\tau_p|_{U_q}$ ist dann glatt, weil

$$\tau_p|_{U_q} \circ \varphi^{-1} = \tau \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \tau$$

- Falls $q \in V' := M \setminus \varphi^{-1}(\overline{C_{1.5}(0)})$, wählen wir $U_q := V'$. Die Funktion $\tau_p|_{U_q}$ ist dann konstant (gleich 0) und damit glatt.

Jetzt beweisen wir Theorem 2.5.5.

Beweis von Theorem 2.5.5. Sei $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ wie in Lemma 2.5.6. Wir setzen $G_0 := \emptyset$. Für $p \in M$ wähle $\alpha_p \in \Lambda$, sodass $p \in U_{\alpha_p}$. Sei i_p die größte natürliche Zahl, sodass $p \in M \setminus \overline{G_{i_p}}$. Sei (V, φ) eine um p zentrierte Karte mit $V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} \setminus \overline{G_{i_p}})$ und $\varphi(V) \supset \overline{C_2(0)}$. Sei τ wie in Lemma 2.5.7. Wie in Bemerkung 2.5.8 definieren wir $\tau_p \in C^\infty(M)$ durch

$$\tau_p(q) = \begin{cases} (\tau \circ \varphi)(q) & \textit{für } q \in V \\ 0 & \textit{für } q \notin V. \end{cases}$$

τ_p ist konstant gleich 1 auf einer Umgebung W_p von p und ist kompakt getragen mit $\operatorname{supp} \tau_p \subset V \subset U_{\alpha_p} \cap (G_{i_p+2} \setminus \overline{G_{i_p}})$.

Sei nun $i \geq 1$. Wir wählen $p_1, \ldots, p_m \in \overline{G_i} \setminus G_{i-1}$ so, dass die Familie $\{W_{p_j}\}_{1 \leq j \leq m}$, wobei jedes W_{p_j} wie oben konstruiert wird, eine Überdeckung der kompakten Menge $\overline{G_i} \setminus G_{i-1}$ ist. Für $1 \leq j \leq m$ bezeichnen wir mit τ_{p_j} die glatte Funktion, die ausgehend von p_j wie oben konstruiert wird. Durch die Wiederholung dieses Prozess für jedes $i \in \mathbb{N}$ bekommen wir abzählbar viele Funktionen, die wir mit τ_1, τ_2,... bezeichnen.

Die Familie $\{\operatorname{supp} \tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist lokal endlich (**Aufgabe**) und für jedes $i \in \mathbb{N}$, existiert ein $\alpha_i \in \Lambda$ mit $\operatorname{supp} \tau_i \subset U_{\alpha_i}$. Wegen der lokalen Endlichkeit der Familie $\{\operatorname{supp} \tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ gilt für jedes $p \in M$, dass $\tau_i(p)$ für fast alle i verschwindet. Damit ist die punktweise definierte Summe $T = \sum_i \tau_i$ eine wohldefinierte Funktion mit $T(p) \neq 0$ für alle $p \in M$. Weiterhin ist die Funktion T glatt, da sie (wegen der lokalen Endlichkeit von $\{\operatorname{supp} \tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$) in einer offenen Umgebung jedes Punktes von M durch eine endliche Summe der Funktionen τ_i gegeben ist. Wir setzen

$$\psi_i = \frac{\tau_i}{T}.$$

Dann gilt

$$\sum_i \psi_i(p) = 1$$

für jedes p. Da $\operatorname{supp} \psi_i = \operatorname{supp} \tau_i$, ist $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Nun konstruieren wir eine Zerlegung der Eins $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ (also mit der selben Indexmenge wie $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$). Sei $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ die gerade konstruierte Zerlegung der Eins und sei $\alpha \in \Lambda$. Wir definieren

$$\widetilde{\eta}_\alpha := \sum_{i : \operatorname{supp} \psi_i \subset U_\alpha} \psi_i.$$

Falls kein i mit $\operatorname{supp}\psi_i \subset U_\alpha$ existiert, setzen wir $\eta_\alpha = 0$. Wir definieren $\eta \coloneqq \sum_\alpha \widetilde{\eta}_\alpha$ punktweise und setzen

$$\eta_\alpha = \frac{\widetilde{\eta}_\alpha}{\eta}.$$

Die Familie $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ist eine Zerlegung der Eins bezüglich $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ mit $\operatorname{supp}\eta_\alpha \subset U_\alpha$. Wir bemerken, dass man nicht gewährleisten kann, dass η_α kompakt getragen sind. □

Aufgabe 2.5.9. Beweisen Sie, dass die in dem Beweis von Theorem 2.5.5 konstruierte Familie $\{\operatorname{supp}\tau_i\}$ lokal endlich ist.

Wir werden das folgende Korollar aus Theorems 2.5.5 häufiger benutzen.

Korollar 2.5.10. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $U \subset M$ offen. Sei $A \subset M$ abgeschlossen mit $A \subset U$. Dann existiert eine glatte Funktion η mit den folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq \eta(p) \leq 1$ für alle $p \in M$,
- $\eta(p) = 1$ für alle $p \in A$ und
- $\operatorname{supp}\eta \subset U$.

Beweis. Wähle eine Zerlegung der Eins $\{\eta, \psi\}$ bezüglich der offenen Überdeckung $\{U, M \setminus A\}$ mit $\operatorname{supp}\eta \subset U$ und $\operatorname{supp}\psi \subset M \setminus A$. η ist die gesuchte Funktion. □

Aufgabe 2.5.11. In der Voraussetzung von Theorem 2.5.5 ersetzen Sie „Mannigfaltigkeit“ mit „Mannigfaltigkeit mit Rand“ und beweisen Sie die neue Aussage.

Kapitel 3

Das (Ko-)Tangentialbündel und das (Ko-)Differential

In der Analysis kann man zum Beispiel anhand des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit sehen, wie das Differential einer differenzierbare Abbildung für die Untersuchung der Abbildung nützlich sein kann. In diesem Kapitel verallgemeinern wir das Konzept des Differentials auf differenzierbaren Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten. Dafür benötigen wir zuerst das Konzept des Tangentialraums an einem Punkt einer Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum an einem Punkt kann als eine lineare Approximation der Mannigfaltigkeit in der Nähe dieses Punkts interpretiert werden. Das Differential einer differenzierbaren Abbildung wird dann als eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen definiert.

3.1 Der Tangential- und Kotangentialraum

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und U eine offene Umgebung von x. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die Funktion f kann in unterschiedliche Richtungen abgeleitet werden. Auf diese Weise ergibt jede „Richtung am Punkt x“ einen Operator zwischen dem Raum der Funktionen, die in einer Umgebung von x definiert sind, und $\mathbb{R}$. Der Raum solcher „Richtungsableitungsoperatoren“ ist ein n-dimensionaler Vektorraum, den wir als der Tangetialraum von $\mathbb{R}^n$ am Punkt x bezeichnen. Da Mannigfaltigkeiten lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussehen, können wir erwarten, dass wir den Begriff der Richtungsableitung und Tangentialraum für Mannigfaltigkeiten verallgemeinern können.

Im Folgenden sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Wir setzen

$$C^k_p(M) \coloneqq \{f\colon U \to \mathbb{R} | U \subset M \text{ ist eine offene Umgebung von } p,\ f \text{ ist } C^k\}.$$

Betrachte die Äquivalenzrelation auf $C^k_p(M)$ definiert durch

$$f \sim g \iff f \text{ und } g \text{ stimmen in einer Umgebung von } p \text{ überein.}$$

Definition 3.1.1. Der Raum $\frac{C^k_p(M)}{\sim}$ heißt der *Raum der Funktionskeime der Klasse C^k am Punkt p*. Er wird mit $GC^k_p(M)$ bezeichnet. Die Äquivalenzklasse $[f] \in GC^k_p(M)$ einer Funktion $f \in C^k_p(M)$ heißt der *Keim der Funktion f an Punkt p*.

Bemerkung 3.1.2. In der Literatur wird der Raum $GC^k_p(M)$ häufiger mit $C^k_p(M)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.1.3. Wir haben eine Kette von Inklusionen

$$C_p^1(M) \supset C_p^2(M) \supset \cdots \supset C_p^\infty(M)$$

und damit eine Kette von Inklusionen

$$GC_p^1(M) \supset GC_p^2(M) \supset \cdots \supset GC_p^\infty(M).$$

Bemerkung 3.1.4. Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei $[f] \in GC_p^k(M)$ mit einem Repräsentanten $f\colon U \to \mathbb{R}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\lambda[f] \coloneqq [\lambda f].$$

Sei weiterhin $[g] \in GC_p^k(M)$ mit einem Repräsentant $g\colon V \to \mathbb{R}$. Wir definieren $[f] + [g]$ als den Keim der Funktion

$$U \cap V \to \mathbb{R} \qquad q \mapsto f(q) + g(q)$$

am Punkt p, die wir mit $f+g$ bezeichnen. Dieser Keim hängt nur von den Äquivalenzklassen $[f]$ und $[g]$ ab und nicht von den gewählten Repräsentanten f und g. Weiterhin definieren wir $[f][g]$ als der Keim der Funktion

$$U \cap V \to \mathbb{R} \qquad q \mapsto f(q)g(q),$$

die wir mit fg bezeichnen und die wieder nur von der Äquivalenzklassen $[f]$ und $[g]$ abhängt. Versehen mit diesen Operationen ist die Menge $GC_p^k(M)$ eine Algebra.

Bemerkung 3.1.5. Seien $[f], [g] \in GC_p^k(M)$. Falls $[f] = [g]$, dann gilt offensichtlich $f(p) = g(p)$. Die Abbildung

$$GC_p^k(M) \to \mathbb{R} \qquad [f] \mapsto f(p)$$

ist also wohldefiniert.

Bemerkung 3.1.6. Falls es aus dem Kontext klar ist, mit welcher Mannigfaltigkeit wir arbeiten, schreiben wir G_p^k statt $GC_p^k(M)$. Im Folgenden werden wir uns hauptsächlich mit G_p^∞ beschäftigen.

Definition 3.1.7. Sei $\gamma\colon (a, b) \to M$ eine C^1-Kurve mit $\gamma(t_0) = p$ für ein $t_0 \in (a, b)$. Die Abbildung

$$X\colon G_p^\infty \to \mathbb{R} \qquad [f] \mapsto \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}$$

heißt ein *Tangentialvektor* am Punkt p. Zusätzlich nennen wir X den *Tangentialvektor an der Kurve γ an der Stelle t_0*.

Bemerkung 3.1.8.

- Tangentialvektoren an Punkten von C^k-Mannigfaltigkeiten werden ganz analog definiert. Dafür ersetzt man in Definition 3.1.7 den Raum G_p^∞ mit G_p^k.
- $\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}$, in der Situation von 3.1.7, hängt nicht von Wahl eines Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[f]$ ab, da alle Repräsentanten in einer Umgebung von $p = \gamma(t_0)$ übereinstimmen.

- Zwei unterschiedliche Kurven können denselben Tangentialvektor induzieren. Das passiert z. B. wenn zwei Kurven $\gamma_1\colon (a,b) \to M$ und $\gamma_2\colon (a,b) \to M$ in einer Umgebung eines $t_0 \in (a,b)$ übereinstimmen. Die Tangentialvektoren an γ_1 und γ_2 an der Stelle t_0 stimmen dann überein.

Bemerkung 3.1.9. Wir benutzen die Notation von Definition 3.1.7. Die Kurve γ definiert auch eine Abbildung

$$G_p^1 \to \mathbb{R} \qquad [f] \mapsto \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0},$$

deren Einschränkung auf $G_p^\infty \subset G_p^1$ mit X übereinstimmt. Wir bezeichnen die hier definierte Abbildung auch mit X. Auf diese Weise wirken Tangentialvektoren an glatte Mannigfaltigkeiten auf Keime von C^1-Funktionen.

Aufgabe 3.1.10. Finden Sie zwei C^1-Kurven $\gamma_1, \gamma_2\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$, die nur an der Stelle $0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ übereinstimmen und denselben Tangentialvektor an der Stelle 0 besitzen.

Definition 3.1.11. Die Menge der Tangentialvektoren an einem Punkt $p \in M$ heißt der *Tangentialraum* von M am Punkt p und wird mit T_pM bezeichnet.

Beispiel 3.1.12. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Sei $p \in U$. Wir setzen $x_0 \coloneqq \varphi(p)$ und definieren

$$\gamma_i\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M \qquad t \mapsto \varphi^{-1}(x_0 + te_i)$$

für ein hinreichend kleines ϵ. Hier bezeichnet $e_i \in \mathbb{R}^n$ den i-ten Standardbasisvektor. Wir bezeichnen den Tangentialvektor von γ_i an der Stelle 0 mit $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}|_p[f] &= \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma_i)}{\mathrm{d}t}|_{t=0} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(f \circ \varphi^{-1})(x_0 + te_i) - (f \circ \varphi^{-1})(x_0)}{t} \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(x_0). \end{aligned}$$

Der Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ leitet Funktionen, die in einer Umgebung von p definiert sind, in die i-te Koordinatenrichtung ab. In dieser Weise induziert jede Karte (U, φ) einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit n Tangentialvektoren an jedem Punkt $p \in U$. Diese Tangentialvektoren sind natürlich von der Wahl der Karte abhängig. Wir berechnen zusätzlich

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p([x^j]) = \frac{\partial(x^j \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(x_0) = \frac{\partial((r^j \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}(x_0) = \frac{\partial r^j}{\partial r^i}(x_0) = \delta_i^j,$$

wobei

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

das sogenannte *Kronecker-Delta* ist.

Beispiel 3.1.13. Wir betrachten nun einen Spezialfall des vorherigen Beispiels. Für $M = \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Identitätskarte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$. Die i-te Koordinatenfunktion dieser Karte ist $r^i \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = r^i$ und wir haben

$$\frac{\partial}{\partial r^i}|_p([f]) = \frac{\partial(f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1})}{\partial r^i}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(p)) = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p).$$

Der Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial r^i}|_p$ ist also nichts anderes als die i-te Richtungsableitung.

Bemerkung 3.1.14. Ein Tangentialvektor $X \in T_pM$ hat die folgende Eigenschaften:

- $X\colon G_p^\infty \to \mathbb{R}$ ist linear.
- $X([f][g]) = g(p)X([f]) + f(p)X([g])$ für alle $[f],[g] \in G_p^\infty$.

In der Tat: Wähle eine Kurve $\gamma\colon (a,b) \to M$, sodass X der Tangentialvektor an γ an einer Stelle $t_0 \in (a,b)$ ist. Wegen Linearität der Ableitung gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $[f],[g] \in G_p^\infty$

$$X(\lambda[f]+[g]) = \frac{\mathrm{d}\left((\lambda f + g)\circ\gamma\right)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} = \lambda\frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}(g\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} = \lambda X([f]) + X([g]).$$

Zusätzlich gilt wegen der Produktregel

$$X([f][g]) = \frac{\mathrm{d}\left((fg)\circ\gamma\right)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}\left((f\circ\gamma)(g\circ\gamma)\right)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} =$$

$$(g\circ\gamma)(t_0)X([f]) + (f\circ\gamma)(t_0)X([g]) = g(p)X([f]) + f(p)X([g]).$$

Wegen Bemerkung 3.1.14 wissen wir, dass für $p \in M$ der Tangentialraum T_pM eine Teilmenge von $L(G_p^\infty;\mathbb{R})$ ist. Das bedeutet, dass wir Tangentialvektoren addieren oder mit einer reellen Zahl multiplizieren können. In der folgenden Proposition zeigen wir u. a., dass das Ergebnis solcher Operationen wieder ein Tangentialvektor ist. Das impliziert, dass T_pM ein Untervektorraum von $L(G_p^\infty;\mathbb{R})$ und insbesondere ein Vektorraum ist.

Proposition 3.1.15. *Sei $p \in M$ und sei (U,φ) eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1,\dots,x^n\}$. Seien $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ die induzierten Tangentialvektoren (siehe Beispiel 3.1.12).*

1. *Für jedes $X \in T_pM$ existieren $\{\xi^1,\dots,\xi^n\}$, sodass $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.*
2. *Für jedes $X \in T_pM$ gilt $X = \sum_i X([x^i])\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$.*
3. *Jede beliebige Linearkombination der Tangentialvektoren $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ ist ein Tangentialvektor am Punkt p.*
4. *Die Familie der Tangentialvektoren $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ ist linear unabhängig.*

Beweis. Wir setzen $x_0 \coloneqq \varphi(p)$.

1. Für $X \in T_pM$ wählen wir eine Kurve $\gamma\colon (a,b) \to M$, sodass X der Tangentialvektor an γ an einer Stelle $t_0 \in (a,b)$ ist. O. B.d. A. können wir annehmen, dass $\gamma([a,b]) \subset U$ (sonst können wir das Intervall kleiner machen). Wir setzen $\gamma^i \coloneqq r^i \circ (\varphi\circ\gamma)$. Also γ^i ist die i-te Komponente der Kurve $\varphi\circ\gamma$. Es gilt

$$X([f]) = \frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}(f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}(x_0).$$

Wir setzen $\xi^i \coloneqq \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}$. Dann gilt

$$X([f]) = \sum_i \xi^i\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}(x_0) = \sum_i \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p([f].)$$

Die Behauptung folgt.

2. Nach dem ersten Teil der Proposition existieren $\xi^1, \dots, \xi^n$, sodass $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Es gilt
$$X([x^j]) = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p([x^j]) = \sum_i \xi^i \delta_i^j = \xi^j.$$
3. Sei $\sum_i \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ eine beliebige Linearkombination der $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$. Wir setzen $\zeta := (\zeta^1, \cdots, \zeta^n)$. Für ein hinreichend kleines ϵ betrachte die Kurve
$$\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M \qquad t \mapsto \varphi^{-1}(x_0 + t\zeta).$$
Eine Berechnung wie im Beweis der ersten Teil der Aussage zeigt, dass $\sum_i \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ der Tangentialvektor an γ an der Stelle 0 ist.
4. Sei $\sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = 0$ für $\eta^i \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\eta^j = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p([x^j]) = 0.$$
Das zeigt, dass die Familie $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ linear unabhängig ist.

□

Korollar 3.1.16. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Dann ist T_pM ein n-dimensionaler Vektorraum.

Bemerkung 3.1.17. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Es folgt aus Proposition 3.1.15, dass wir aus jeder Karte (U, φ) für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$ und $p \in U$ eine Basis $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ von T_pM erhalten. Diese Basis hängt natürlich von Wahl der Karte ab. Sie erlaubt uns T_pM, in einer nicht-kanonischen Weise, mit $\mathbb{R}^n$ zu identifizieren.

Definition 3.1.18. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine *Derivation* der Algebra G_p^∞ ist eine lineare Abbildung $D\colon G_p^\infty \to \mathbb{R}$ mit
$$D([f][g]) = g(p)D([f]) + f(p)D([g]).$$

Bemerkung 3.1.19. Die Menge der Derivationen von G_p^∞ ist ein Untervektorraum des Vektorraums $L(G_p^\infty; \mathbb{R})$. Wegen Bemerkung 3.1.14 ist T_pM ein Untervektorraum der Vektorraum der Derivationen von G_p^∞. Wir werden sehen, dass T_pM mit der Menge der Derivationen von G_p^∞ übereinstimmt. Aus diesem Grund definieren manche Quellen T_pM als den Raum der Derivationen von G_p^∞.

Aufgabe 3.1.20. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$.

1. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit c_λ die konstante Funktion mit $c_\lambda(q) = \lambda$ für all $q \in M$. Sei D eine Derivation von G_p^k. Zeigen Sie, dass $D([c_\lambda]) = 0$. (Hinweis: Betrachten Sie erst den Fall $\lambda = 1$.)
2. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Seien $[f], [g] \in G_p^k$ Funktionenkeime, die am Punkt p verschwinden, und sei D eine Derivation von G_p^k. Zeigen Sie, dass $D([f][g]) = 0$.
3. Zeigen Sie, dass der Raum der Derivationen von G_p^∞ n-dimensional ist und folgern Sie daraus, dass T_pM mit dem Raum der Derivationen von G_p^∞ übereinstimmt. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.2.24.)

4. Sei $k \in \mathbb{N}$. Finden Sie heraus, warum Ihr Beweis der vorherigen Teilaufgabe nicht benutzt werden kann, um zu zeigen, dass der Raum der Derivationen von G_p^k n-dimensional ist.

Beispiel 3.1.21.

- Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Für alle $v \in V$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus zwischen V und T_vV. Für $w \in V$ betrachte die Kurve

$$\gamma_w \colon t \mapsto v + tw.$$

  Die Abbildung

$$\Phi_v \colon V \to T_vV \qquad w \mapsto X_w$$

  ist ein Isomorphismus: Da V und T_vV n-dimensional sind, reicht es zu zeigen, dass Φ_v injektiv ist. Für $w \in V$ ungleich 0 wählen wir ein Funktional $\alpha \colon V \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(w) = 1$. Die Funktion α ist glatt, da sie linear ist. Nach Definition ist

$$X_w([\alpha]) = \frac{\mathrm{d}(\alpha \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = 1$$

  Die letzte Gleichheit gilt, da

$$(\alpha \circ \gamma)(t) = \alpha(v + tw) = \alpha(v) + t\alpha(w) = \alpha(v) + t.$$

  Das zeigt, dass Φ_v injektiv und damit ein Isomorphismus ist.

- Jetzt betrachten wir den Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$. Für $v \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir wie oben einen kanonischen Isomorphismus $\Phi_v \colon \mathbb{R}^n \to T_v\mathbb{R}^n$. Sei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Standardbasisvektor. Für $[f] \in GC_v^\infty(\mathbb{R}^n)$, gilt

$$(\Phi_v(e_i))([f]) = \lim_{t \to 0} \frac{f(v + te_i) - f(v)}{t} = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p) = \frac{\partial}{\partial r^i}|_p([f]).$$

  Also wird e_i durch Φ_v mit der i-ten Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial r^i}|_p$ identifiziert.

Beispiel 3.1.22. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $U \subset M$ offen. Sei $p \in U$. Die Einschränkungsabbildung

$$\mathrm{res} \colon G_p^\infty(M) \to G_p^\infty(U) \qquad [f : V \to \mathbb{R}] \mapsto [f|_{U \cap V}]$$

ist ein Isomorphismus von Algebren (**warum?**). Die Abbildung

$$T_pU \to T_pM \qquad X \mapsto ([f] \mapsto X(\mathrm{res}([f])))$$

ist ein (kanonischer) Isomorphismus: Sie ist offensichtlich injektiv und die Dimensionen von T_pU und T_pM sind gleich. Man kann diese Abbildung auch geometrisch definieren: Eine C^1-Kurve $\gamma_U \colon (a, b) \to M$ mit $\gamma(t_0) = p$ ist gleichzeitig eine C^1-Kurve in M, die wir mit γ_M bezeichnen. Der obige Isomorphismus bildet den Tangentialvektor von γ_U an t_0 auf den Tangentialvektor von γ_M an t_0 ab. Wir werden ab jetzt die Tangentialräume von Mannigfaltigkeiten und ihren offenen Teilmengen identifizieren.

Bemerkung 3.1.23. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Sei $X \in T_pM$. Ab jetzt schreiben wir $X(f)$ statt $X([f])$ für $f \in C_p^\infty(M)$.

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Seien (U, φ) und (V, ψ) Karten für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ bzw. $\{y^1, \ldots, y^n\}$ mit $p \in U \cap V$. Seien $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ bzw. $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_p\}$ die induzierten Tangentialvektoren wie im Beispiel 3.1.12. Jedes $X \in T_pM$ ist dann eine Linearkombination $\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ mit $\xi^i = X(x^i)$. Andererseits ist $X = \sum_i \zeta^i \frac{\partial}{\partial y^i}|_p$ mit $\zeta^i = X(y^i)$. Wir können die Zahlen $\{\zeta^i\}_{1 \leq i \leq n}$ durch eine Basiswechselmatrix und die Zahlen $\{\xi^i\}_{1 \leq i \leq n}$ bestimmen. Die Basiswechselmatrix wird in der folgenden Proposition bestimmt.

Proposition 3.1.24. *Wir benutzen die Notation von oben. Wir setzen*

$$\mathrm{id}_{\varphi,\psi} := \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$$

und bezeichnen mit $\big((D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)}\big)^i_j$ *die* ij*-te Komponente der Jacobimatrix von* $\mathrm{id}_{\varphi,\psi}$ *am Punkt* $\varphi(p)$. *Dann gilt*

$$\zeta^i = \sum_{1 \leq j \leq n} \big((D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)}\big)^i_j \, \xi^j.$$

Beweis. Es gilt

$$\zeta^i = X(y^i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_p(y^i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi^j \frac{\partial(y^i \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p))$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n} \xi^j \frac{\partial(r^i \circ \psi \circ \varphi^{-1})}{\partial r^j}(\varphi(p)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi^j \frac{\partial(r^i \circ \mathrm{id}_{\varphi,\psi})}{\partial r^j}(\varphi(p)).$$

Die Behauptung folgt, da $\frac{\partial(r^i \circ \mathrm{id}_{\varphi,\psi})}{\partial r^j}(\varphi(p)) = \big((D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)}\big)^i_j$. □

Bemerkung 3.1.25. Proposition 3.1.24 besagt, dass

$$\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \vdots \\ \zeta^n \end{pmatrix} = (D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix},$$

wobei wir mit etwas Notationsmissbrauch die Jacobimatrix von $\mathrm{id}_{\varphi,\psi}$ mit $D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi}$ bezeichnen. Analog erhalten wir mittels $\mathrm{id}^{-1}_{\varphi,\psi} = \varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = (D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})^{-1}_{\varphi(p)} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \vdots \\ \zeta^n \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten: Die Basiswechselmatrix zwischen den Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_p\}$ ist die Jacobimatrix der Kartenwechselabbildung $\psi \circ \varphi^{-1}$ an der Stelle $\varphi(p)$.

Definition 3.1.26. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Der *Kotangentialraum von M am Punkt p* ist der Dualraum von T_pM und wird mit T_p^*M bezeichnet. Elemente von T_p^*M heißen *Kotangentialvektoren*.

Bemerkung 3.1.27. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Sei (U, φ) eine Karte mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ mit $p \in U$. Wir bezeichnen mit $\{\mathrm{d}x^1|_p, \ldots, \mathrm{d}x^n|_p\} \subset T_p^*M$ die zu $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\} \subset T_pM$ duale Basis. Es gilt also nach Definition

$$\mathrm{d}x^i|_p(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \delta^i_j. \qquad (*)$$

Jedes $\omega \in T_p^*M$ ist eine Linearkombination $\sum_i \xi_i \mathrm{d}x^i|_p$. Wegen $(*)$ gilt $\xi_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$.

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Seien (U, φ) und (V, ψ) Karten für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$ bzw. $\{y^1, \dots, y^n\}$ und mit $p \in U \cap V$. Seien $\{\mathrm{d}x^1|_p, \dots, \mathrm{d}x^n|_p\}$ bzw. $\{\mathrm{d}y^1|_p, \dots, \mathrm{d}y^n|_p\}$ die induzierten Kotangentialvektoren wie in Bemerkung 3.1.27. Jedes $\omega \in T_p^*M$ ist dann eine Linearkombination $\sum_i \xi_i \mathrm{d}x^i|_p$ mit $\xi_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$. Andererseits ist $\omega = \sum_i \zeta_i \mathrm{d}y^i|_p$ mit $\zeta^i = \omega(\frac{\partial}{\partial y^i}|_p)$. Um das Tupel $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ mithilfe des Tupels $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ zu berechnen, benötigen wir die Basiswechselmatrix zwischen den Basen $\{\mathrm{d}x^1|_p, \dots, \mathrm{d}x^n|_p\}$ und $\{\mathrm{d}y^1|_p, \dots, \mathrm{d}y^n|_p\}$. Aus Lineare Algebra, und wegen Proposition 3.1.24, wissen wir, dass die transponierte Matrix zu $(D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})^{-1}_{\varphi(p)}$ die gesuchte Basiswechselmatrix ist, wobei wir hier die Notation von Proposition 3.1.24 benutzen. In der folgenden Proposition geben wir eine direkte Herleitung dieser Tatsache.

Proposition 3.1.28. *Wir benutzen die Notation von oben. Wir setzen*

$$\mathrm{id}_{\varphi,\psi} := \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$$

und bezeichnen mit $\big((D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)}\big)^i_j$ *die* ij*-te Komponente der Jacobimatrix von* $\mathrm{id}_{\varphi,\psi}$ *im Punkt* $\varphi(p)$*. Dann gilt*

$$\zeta_i = \sum_{1 \le j \le n} \Big((D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})^{-1}_{\varphi(p)}\Big)^j_i \xi_j$$

Beweis. Es gilt

$$\zeta_i = \omega(\frac{\partial}{\partial y^i}|_p) = \sum_{1 \le i \le n} \xi_j \mathrm{d}x^j|_p(\frac{\partial}{\partial y^i}|_p)$$

$$= \sum_{1 \le i \le n} \xi_j \mathrm{d}x^j|_p(\sum_{1 \le k \le n} \Big((D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})^{-1}_{\varphi(p)}\Big)^k_i \frac{\partial}{\partial x^k}|_p) = \sum_{1 \le j \le n} \Big((D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})^{-1}_{\varphi(p)}\Big)^j_i \xi_j.$$

□

3.2 Das Differential einer differenzierbaren Abbildung

Das Differential einer differenzierbaren Abbildung wird nun als eine lineare Abbildung zwischen Tangentialräumen definiert.

Definition 3.2.1. Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Sei $F\colon M \to N$ eine C^1-Abbildung. Sei $p \in M$. Das *Differential von F im Punkt p* ist die Abbildung

$$(DF)_p \colon T_pM \to T_{F(p)}N,$$

die wie folgt definiert wird: Für $x \in T_pM$ wählen wir eine C^1-Kurve $\gamma\colon (a,b) \to M$, sodass X der Tangentialvektor an γ an der Stelle $t_0 \in (a,b)$ ist. Wir definieren $(DF)_p$ als den Tangentialvektor an die Kurve

$$F \circ \gamma \colon (a,b) \to N$$

an der Stelle t_0.

Es ist vielleicht auf den ersten Blick nicht klar, ob $(DF)_p(X)$ in Definition 3.2.1 von Wahl der Kurve γ unabhängig ist. Das folgende Lemma beweist diese Unabhängigkeit.

Lemma 3.2.2. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Sei $F\colon M \to N$ eine C^1-Abbildung. Sei $p \in M$ und $X \in T_pM$. Sei $\gamma\colon (a,b) \to M$ eine C^1-Kurve, sodass X der Tangentialvektor an γ an der Stelle $t_0 \in (a,b)$ ist. Wir definieren $Y \in T_{F(p)}N$ durch*

$$GC^\infty_{F(p)}(N) \to \mathbb{R} \qquad [f] \mapsto \frac{d(f\circ(F\circ\gamma))}{dt}|_{t=t_0}.$$

Dann gilt $Y(f) = X(f\circ F)$. Insbesondere ist $(DF)_p(X)$ in Definition 3.2.1 von Wahl der Kurve γ unabhängig.

Beweis. Für $[f] \in GC^\infty_{F(p)}(N)$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}(f\circ(F\circ\gamma))}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}((f\circ F)\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} = X(f\circ F).$$

Wir bemerken, dass die Abbildung $f\circ F$ in einer offenen Umgebung von $\gamma(t_0)$ wohldefiniert ist und benutzen hier die Beobachtung von Bemerkung 3.1.9. $\square$

Das Lemma 3.2.2 gibt uns eine kurvenfreie Definition des Differntials: Sei F wie in Definition 3.2.1. Für $X \in T_pM$ und $[f] \in GC^\infty_{F(p)}(N)$ gilt

$$((DF)_p(X))([f]) = X(f\circ F).$$

Mithilfe dieser Beschreibung des Differentials sieht man sofort dessen Linearität.

Korollar 3.2.3. Sei F wie in Definition 3.2.1. Das Differential von F an $p \in M$ ist eine lineare Abbildung.

Bemerkung 3.2.4. Wir schreiben häufiger $(F_*)_p$ statt $(DF)_p$ für das Differential einer differenzierbaren Abbildung in einem Punkt p.

Beispiel 3.2.5. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $U \subset M$ offen. Wir bezeichnen mit ι die Inklusionsabbildung $U \to M$. Für $p \in U$ stimmt $(\iota_*)_p\colon T_pU \to T_pM$ mit dem in Beispiel 3.1.22 diskutierten Isomorphismus zwischen T_pU und T_pM überein.

Seien M und N m- bzw. n-dimensionale Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in M$. Seien (U,φ) und (V,ψ) Karten um p und $F(p)$ für M bzw. N mit Koordinatenfunktionen $\{x^1,\dots,x^m\}$ und $\{y^1,\dots,y^n\}$. In der folgenden Proposition bestimmen wir die darstellende Matrix von $(F_*)_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ bezüglich der Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x^m}|_p\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_{F(p)},\dots,\frac{\partial}{\partial y^n}|_{F(p)}\}$ von T_pM bzw. $T_{F(p)}N$.

Proposition 3.2.6. *Wir benutzen die obige Notation. Wir setzen $F_{\varphi,\psi} := \psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ und bezeichnen mit $\big((DF_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)}\big)^i_j$ die ij-te Komponente der Jacobimatrix von $F_{\varphi,\psi}$ am Punkt p. Für $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ gilt*

$$(F_*)_p(X) = \sum_{i,k} \big((DF_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)}\big)^i_k\, \xi^k \frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)}.$$

Mit anderen Worten: $(F_*)_p(X) = \sum_i \zeta^i \frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)}$ mit

$$\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \vdots \\ \zeta^n \end{pmatrix} = (DF_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix},$$

wobei wir mit etwas Notationsmissbrauch die Jacobimatrix von $F_{\varphi,\psi}$ mit $DF_{\varphi,\psi}$ bezeichnen.

Beweis. Die Aussage kann analog zu Proposition 3.1.24 bewiesen werden (**Aufgabe**). □

Aufgabe 3.2.7. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $\gamma\colon (a,b) \to M$ eine C^1-Kurve. Wir bezeichnen mit $r := r^1$ die Standardkoordinatenfunktion auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Tangentialvektor an γ an der Stelle t_0 mit $(\gamma_*)_{t_0}(\frac{\partial}{\partial r}|_{t_0})$ übereinstimmt. Wir bezeichnen manchmal Tangentialvektoren zur Kurven an einer Stelle t_0 mit $\dot{\gamma}(t_0)$.

Aufgabe 3.2.8. Seien V und W endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $U \subset V$ offen. Sei $: U \to W$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass für $p \in U$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
TpU \arrow[r, "(F_*)_p"] \arrow[d, "\cong"] & T_{F(p)}W \arrow[d, "\cong"] \\
V \arrow[r, "(DF)_p"] & W
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier bezeichnet $(F_*)_p$ das in Definition 3.2.1 eingeführte Differential von F an der Stelle p und $(DF)_p$ das in Definition 1.2.5 eingeführte (klassische) Differential. Weiterhin ist die linke vertikale Abbildung die Verkettung

$$T_pU \cong T_pV \cong V$$

der kanonischen Isomorphismen, die in Beispiel 3.1.21 und Beispiel 3.1.22 diskutiert wurden und die rechte vertikale Abbildung der Isomorphismus aus Beispiel 3.1.21.

Beispiel 3.2.9. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und sei f eine glatte Funktion, die auf einer offenen Umgebung von p definiert ist. Wir bezeichnen mit $r := r^1$ die Standardkoordinatenfunktion auf $\mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ ist jedes $Y \in T_x\mathbb{R}$ ein Vielfaches von $\frac{\partial}{\partial r}|_x$. Für jedes $X \in T_pM$ gibt es also eine Zahl $(\mathrm{d}f)_p(X)$, sodass $(f_*)_p(X) = (\mathrm{d}f)_p(X)\frac{\partial}{\partial r}|_{f(p)}$. Die Abbildung

$$(\mathrm{d}f)_p\colon T_pM \to \mathbb{R} \qquad X \mapsto (\mathrm{d}f)_p(X)$$

ist linear und damit ein Kotangentialvektor an p. Für $x \in T_pM$ gilt

$$(\mathrm{d}f)_p(X) = ((f_*)_p(X))\,(r) = X(r \circ f) = X(f).$$

Sei nun (U, φ) eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Es gilt

$$(\mathrm{d}f)_p = \sum_i (\mathrm{d}f)_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)\mathrm{d}x^i = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p(f)\mathrm{d}x^i$$

Definition 3.2.10. Wir benutzen die Notation von 3.2.11. Der Kotangentialvektor $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*M$ heißt das *totale Differential von f in p*.

Beispiel 3.2.11. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Für das totale Differential von x^i gilt:

$$(\mathrm{d}x^i)_p(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \frac{\partial}{\partial x^j}|_p(x^i) = \delta^i_j.$$

Das bedeutet, dass die Kotangentialvektoren $(\mathrm{d}x^i)_p$ mit den in Bemerkung 3.1.27 eingeführten Kotangentialvektoren $(\mathrm{d}x^i)|_p$ übereinstimmen.

Definition 3.2.12. Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Sei $F\colon M \to N$ eine C^1-Abbildung. Sei $p \in M$. Das *Kodifferential von F im Punkt $F(p)$* ist die duale Abbildung zu $(F_*)_p$:

$$(F^*)_{F(p)} := ((F_*)_p)^* : T^*_{F(p)}N \to T^*_pM \qquad \omega \mapsto (X \mapsto \omega((F_*)_p(X)))\,.$$

Aufgabe 3.2.13. Seien M und N m- bzw. n-dimensionale Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in M$. Seien (U,φ) und (V,ψ) Karten um p und $F(p)$ für M bzw. N mit Koordinatenfunktionen $\{x^1,\ldots,x^m\}$ und $\{y^1,\ldots,y^n\}$. Wir setzen $F_{\varphi,\psi} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ und bezeichnen mit $\big((DF_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)}\big)^i_j$ die ij-te Komponente der Jacobimatrix von $F_{\varphi,\psi}$ im Punkt p. Zeigen Sie, dass für $\omega = \sum_i \xi_i \mathrm{d}y^i|_{F(p)} \in T^*_{F(p)}N$

$$(F^*)_{F(p)}(\omega) = \sum_i \zeta_i \mathrm{d}x^i$$

mit

$$\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \vdots \\ \zeta_n\end{pmatrix} = \big((DF_{\varphi,\psi})_{\varphi(p)}\big)^t \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}$$

wobei wir mit A^t die transponierte Matrix einer Matrix A bezeichnen.

Proposition 3.2.14. *Seien M, N und P Mannigfaltigkeiten und seien $F\colon M \to N$ und $G\colon N \to P$ glatte Abbildungen. Sei $p \in M$. Dann gilt*

$$((G \circ F)_*)_p = (G_*)_{F(p)} \circ (F_*)_p$$

und

$$((G \circ F)^*)_{G(F(p))} = (F^*)_{F(p)} \circ (G^*)_{G(F(p))}.$$

Beweis. Für $X \in T_pM$ gilt

$$\left(((G \circ F)_*)_p(X)\right)(f) = X(f \circ (G \circ F)) = X((f \circ G) \circ F) =$$

$$\left((F_*)_p(X)\right)(f \circ G) = \big((G_*)_{F(p)}((F_*)_p(X))\big)(f).$$

Andererseits gilt für $\omega \in T^*_{G(F(p))}P$ und $X \in T_pM$

$$\big(((G \circ F)^*)_{G(F(p))}(\omega)\big)(X) = \omega(((G \circ F)_*)_p(X)) = \omega((G_*)_{F(p)}((F_*)_p(X))) =$$

$$(G_*)_{F(p)}(\omega)((F_*)_p(X)) = \big((F^*)_{F(p)}((G_*)_{F(p)}(\omega))\big)(X) = \big((F^*)_{F(p)} \circ (G^*)_{G(F(p))}(\omega)\big)(X)$$

□

Da für jede Mannigfaltigkeit M das Differential der Identitätsabbildung $\mathrm{id}_m\colon M \to M$ in jedem Punkt $p \in M$ die Identitätsabbildung von T_pM ist, erhalten wir das folgende Korollar aus Proposition 3.2.14.

Korollar 3.2.15. Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus. Dann ist für jedes $p \in M$ das Differential $(F_*)_p$ im Punkt p invertierbar mit der Inversen $(F^{-1}_*)_{F(p)}$.

Die folgende Proposition beschreibt eine wichtige Beziehung zwischen dem Kodifferential und dem totalen Differential. In der Sprache der Kategorientheorie besagt sie, dass das totale Differential natürlich ist.

Proposition 3.2.16. *Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung und $p \in M$. Sei f eine glatte Funktion, die auf einer offenen Umgebung von $F(p)$ definiert ist. Es gilt*

$$(F^*)_{F(p)}((df)_{F(p)}) = (d(f \circ F))_p.$$

Beweis. Sei $X \in T_pM$. Es gilt

$$(F^*)_{F(p)}((\mathrm{d}f)_{F(p)})(X) = (\mathrm{d}f)_{F(p)}((F_*)_p(X)) = (F_*)_p(X)(f) = X(f \circ F) = (\mathrm{d}(f \circ F))_p(X).$$

Die Behauptung folgt. $\square$

Die folgende Proposition ist ein Korollar des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit (Theorem 1.2.14).

Proposition 3.2.17. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten und $p \in M$. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, sodass $(F_*)_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ ein Isomorphismus ist. Dann existiert eine offene Umgebung U von p, sodass $F(U) \subset N$ offen und $F|_U\colon U \to F(U)$ ein Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Da $(F_*)_p$ ein Isomorphismus ist, sind die Dimensionen von M und N gleich und werden hier mit n bezeichnet. Seien (V, φ) und (W, ψ) Karten um p bzw. $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ bzw. $\{y^1, \ldots, y^n\}$. Die Jacobimatrix der Abbildung

$$F_{\varphi,\psi} \coloneqq \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^n \supset \varphi(V \cap F^{-1}(W)) \to \psi(W \cap F(V)) \subset \mathbb{R}^n$$

an der Stelle $\varphi(p)$ ist die darstellende Matrix von $(F_*)_p$ bezüglich der Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ und $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_{F(p)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_{F(p)}\}$. Daher ist das Differential von $F_{\varphi,\psi}$ in $\varphi(p)$ invertierbar. Nach Theorem 1.2.14 existiert eine Umgebung $\widetilde{U} \subset \varphi(V \cap F^{-1}(W))$ von $\varphi(p)$, sodass $F_{\varphi,\psi}(\widetilde{U})$ offen und $F_{\varphi,\psi}|_{\widetilde{U}}\colon \widetilde{U} \to F_{\varphi,\psi}(\widetilde{U})$ ein Diffeomorphismus ist. Wir definieren $U \coloneqq \varphi^{-1}(\widetilde{U})$. Die Menge

$$F(U) = \psi^{-1} \circ F_{\varphi,\psi} \circ \varphi(U) = \psi^{-1}(F_{\varphi,\psi}(\widetilde{U}))$$

ist als Urbild der offenen Menge $F_{\varphi,\psi}(\widetilde{U})$ unter der stetigen Abbildung ψ offen. Da die Kartenabbildungen φ und ψ Diffeomorphismen sind (siehe Beispiel 2.4.17), ist

$$F|_U = \psi^{-1} \circ F_{\varphi,\psi} \circ \varphi|_U\colon U \to F(U)$$

ein Diffeomorphismus. $\square$

Aufgabe 3.2.18. Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Wir bezeichnen mit $\pi_M\colon M \times N \to M$ und $\pi_N\colon M \times N \to N$ die Projektionsabbildungen auf M bzw. N. Sei $p \in M$ und $q \in N$. Zeigen Sie, dass

$$T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \oplus T_qN \qquad X \mapsto (((\pi_M)_*)_p(X), ((\pi_N)_*)_q(X))$$

ein Isomorphismus ist.

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei $\{x^1, \ldots, x^n\}$ eine Familie glatter Funktionen, die auf einer offenen Umgebung von p definiert sind. Wann sind die Funktionen $x^1, \ldots, x^n$ die Koordinatenfunktionen einer Karte für M? Beispiel 3.2.20 und Proposition 3.2.21 beantworten diese Frage. Proposition 3.2.21 ist eine weitere Folgerung des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit (Theorem 1.2.14). Zunächst aber folgende

Definition 3.2.19. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Eine Familie $\{x^1, \ldots, x^j\}$ von glatten Funktionen, die in einer offenen Umgebung von p definiert sind, heißt eine *unabhängige Familie* an der Stelle p, falls die Familie $\{(\mathrm{d}x^1)_p, \ldots, (\mathrm{d}x^j)_p\} \subset T_p^*M$ linear unabhängig ist.

Beispiel 3.2.20. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Das totale Differential von x^i in p ist nichts anderes als $\mathrm{d}x^i|_p$ (siehe Beispiel 3.2.11). Die Familie $\{\mathrm{d}x^1|_p, \dots, \mathrm{d}x^n|_p\}$ ist eine Basis von T_p^*M und insbesondere linear unabhängig. Das bedeutet, dass die Familie der Koordinatenfunktionen eine unabhängige Familie an der Stelle p ist.

Proposition 3.2.21. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $\{x^1, \dots, x^n\}$ eine unabhängige Familie von Funktionen in einem Punkt $p \in M$. Dann sind die Funktionen $x^1, \dots, x^n$ die Koordinatenfunktionen einer Karte um p.*

Beweis. Sei V eine offene Umgebung von p, auf der die Funktionen $x^1, \dots, x^n$ definiert sind. Betrachte die glatte Abbildung

$$\varphi\colon V \mapsto \mathbb{R}^n \qquad q \mapsto (x^1(q), \dots, x^n(q)).$$

Wenn wir zeigen können, dass eine offene Umgebung U von p existiert, sodass $\varphi(U)$ offen und $\varphi|_U\colon U \to \varphi(U)$ ein Diffeomorphismus ist, dann folgt, dass $(U, \varphi|_U)$ eine Karte um p ist, deren Koordinatenfunktionen nach Konstruktion die Funktionen $x^1, \dots, x^n$ sind (siehe Beispiel 2.4.17). Wegen Proposition 3.2.17 reicht es zu zeigen, dass $(\varphi_*)_p$ ein Isomorphismus ist. Diese Aussage ist äquivalent zu der Aussage, dass das Kodifferential $(\varphi^*)_p\colon T^*_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \to T_p^*M$ ein Isomorphismus ist. Es gilt

$$(\varphi^*)_p((\mathrm{d}r^i)_{\varphi(p)}) = (\mathrm{d}(r^i \circ \varphi))_p = (\mathrm{d}x^i)_p.$$

Die Basis $\{(\mathrm{d}r^1)_{\varphi(p)}, \dots, (\mathrm{d}r^n)_{\varphi(p)}\} \subset T^*_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ wird auf die Basis $\{(\mathrm{d}x^1)_p, \dots, (\mathrm{d}x^n)_p\} \subset T_p^*M$ abgebildet. Die Behauptung folgt. □

3.3 Tangential- und Kotangentialbündel

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass wir auf eine natürliche Weise eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf der Vereinigung aller (Ko-)Tangentialräume definieren können. Die resultierende Mannigfaltigkeit heißt das (Ko-)Tangentialbündel und erlaubt uns klassische Begriffe wie (glatte) Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern.

Sei $(M, \mathcal{F})$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir setzen

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM \qquad T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Betrachte die „Projektionsabbildungen“

$$\pi_{TM}\colon TM \to M \qquad T_pM \ni X \mapsto p$$

und

$$\pi_{T^*M}\colon T^*M \to M \qquad T_p^*M \ni \omega \mapsto p.$$

Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Wie wir schon gesehen haben, können wir für jedes $p \in U$, mithilfe der Basis $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$, den Tangentialraum T_pM mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Explizit:

$$T_pM \to \mathbb{R}^n \qquad X \mapsto (\mathrm{d}x^1|_p(X), \dots, \mathrm{d}x^n|_p(X)).$$

Die inverse Abbildung ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n \to T_pM \qquad (\xi^1, \ldots, \xi^n) \mapsto \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

Wir benutzen diese Isomorphismen für jedes $p \in U$, um eine Bijektion zwischen $\pi_{TM}^{-1}(U)$ und $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ zu konstruieren:

$$\widetilde{\varphi}\colon \pi_{TM}^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \qquad T_pM \ni X \mapsto (\varphi(p), \mathrm{d}x^1|_p(X), \ldots, \mathrm{d}x^n|_p(X)).$$

Mithilfe solcher Bijektionen und dem Ergebnis von Aufgabe 1.1.40 können wir eine Topologie auf T_pM einführen: Die Familie

$$\mathcal{B}_{TM} \coloneqq \{\widetilde{\varphi}^{-1}(V) | (U, \varphi) \in \mathcal{F}, V \subset \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \text{ ist offen}\}$$

von Teilmengen von TM erfüllt die Voraussetzungen aus Aufgabe 1.1.40 und ist damit die Basis einer eindeutigen Topologie auf TM (**Aufgabe**), mit der wir TM versehen. Die Bijektionen $\widetilde{\varphi}$ sind dann tautologischerweise Homöomorphismen. Der Raum TM ist also ein lokal euklidischer Raum der Dimension $2n$. Er ist darüber hinaus Hausdorff und zweitabzählbar.

Aufgabe 3.3.1.

1. Zeigen Sie, dass TM Hausdorff ist.

2. Benutzen Sie die Zweitabzählbarkeit von M, um zu zeigen, dass M einen abzählbaren Atlas besitzt.

3. Zeigen Sie, dass TM zweitabzählbar ist.

TM ist also eine $2n$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Die Familie

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = \{(\pi_{TM}^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) | (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$$

ist ein Atlas. In der Tat: Für jedes $X \in T_pM$ finden wir eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ um p. Dann gilt $X \in \pi_{TM}^{-1}(U)$. Zusätzlich ist die Kartenwechselabbildung $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ zwischen Karten $(\pi_{TM}^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ und $(\pi_{TM}^{-1}(V), \widetilde{\psi})$, die durch Karten (U, φ) bzw. (V, ψ) induziert werden, gegeben durch

$$\widetilde{\varphi}(\pi_{TM}^{-1}(U) \cap \pi_{TM}^{-1}(V)) \to \widetilde{\psi}(\pi_{TM}^{-1}(U) \cap \pi_{TM}^{-1}(V))$$

$$(x, \xi^1, \ldots, \xi^n) \mapsto (\psi \circ \varphi^{-1}(x), \sum_{1 \leq j \leq n} ((D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})_x)^1_j\, \xi^j, \ldots, \sum_{1 \leq j \leq n} ((D\,\mathrm{id}_{\varphi,\psi})_x)^n_j\, \xi^j),$$

wobei wir die Notation und das Ergebnis aus Proposition 3.1.24 benutzen. $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ ist glatt, da die Abbildung $\psi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\varphi,\psi}$ glatt ist und (damit) ihre Jacobimatrix glatt von x abhängt. Ab jetzt versehen wir TM mit der eindeutigen differenzierbaren Struktur, die den Atlas $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ enthält.

Definition 3.3.2. Der Raum TM, versehen mit der obigen Topologie und differenzierbaren Struktur, heißt das *Tangentialbündel* von M.

Proposition 3.3.3. *Die Projketionsabbildung $\pi_{TM}\colon TM \to M$ ist glatt.*

Beweis. Sei (U,φ) eine Karte für M und $(\pi_{TM}^{-1}(U),\widetilde{\varphi})$ die induzierte Karte auf TM. Die Abbildung
$$\varphi\circ\pi_{TM}\circ\widetilde{\varphi}\coloneqq\varphi(U)\times\mathbb{R}^n\to\varphi(U)$$
ist gegeben durch $(x,\xi^1,\dots,\xi^n)\mapsto x$ und ist damit glatt. Damit ist die Einschränkung von π_{TM} auf $\pi_{TM}^{-1}(U)$ glatt. Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 3.3.4. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M\to N$ eine glatte Abbildung. Wir definieren
$$F_*\colon TM\to TN \qquad T_pM\ni X\mapsto (F_*)_p(X).$$
Diese Abbildung ist glatt (**warum?**).

Bemerkung 3.3.5. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $U\subset M$ offen. Im Beispiel 3.1.22 haben wir gesehen, dass für alle $p\in U$ die Tangentialräume T_pU und T_pM von U und M an der Stelle p kanonisch isomorph sind. So können wir die (offene) Menge $\pi_{TM}^{-1}(U)$ mit der Menge TU identifizieren. Diese Identifikation ist ein Diffeomorphismus (**Warum?**). Wir werden diese Identifikation häufiger benutzen.

Ganz ähnlich kann man eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf T^*M definieren. Für jede Karte (U,φ) für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1,\dots,x^n\}$ und jedes $p\in U$ können wir, mithilfe der Basis $\{\mathrm{d}x^1|_p,\dots,\mathrm{d}x^n|_p\}$, den Kotangetialraum T_p^*M mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Explizit:
$$T_p^*M\to\mathbb{R}^n \qquad \omega\mapsto(\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p),\dots,\omega(\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)).$$
Durch das Zusammensetzen dieser Isomorphismen bekommen wir eine Bijektion
$$\widetilde{\varphi}\colon\pi_{T^*M}^{-1}(U)\to\varphi(U)\times\mathbb{R}^n \qquad T_p^*M\ni\omega\mapsto(\varphi(p),\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p),\dots,\omega(\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)).$$
Wie für TM können wir diese Bijektionen benutzen, um eine Topologie und eine differenzierbare Struktur auf T^*M zu definieren.

Definition 3.3.6. Der Raum T^*M mit der oben definierten Mannigfaltigkeitsstruktur heißt der *Kotangentialbündel* von M.

Proposition 3.3.7. *Die Projektionsabbildung $\pi_{T^*M}\colon T^*M\to M$ ist glatt.*

Beweis. Sei (U,φ) eine Karte für M und $(\pi_{T^*M}^{-1}(U),\widetilde{\varphi})$ die induzierte Karte auf TM. Die Abbildung
$$\varphi\circ\pi_{T^*M}\circ\widetilde{\varphi}\coloneqq\varphi(U)\times\mathbb{R}^n\to\varphi(U)$$
ist gegeben durch $(x,\xi_1,\dots,\xi_n)\mapsto x$ und ist damit glatt. □

Bemerkung 3.3.8. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $U\subset M$ offen. Ähnlich wie in Bemerkung 3.3.5 können wir T^*U mit der Menge $\pi_{T^*M}^{-1}(U)$ identifizieren.

Beispiel 3.3.9. Mittels der Identitätskarte $(\mathbb{R}^n,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ auf $\mathbb{R}^n$ erhalten wir Diffeomorphismen
$$\Phi\colon TM\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{2n} \qquad T_pM\ni X\mapsto(p,\mathrm{d}r^1|_p(X),\dots,\mathrm{d}r^n|_p(X))$$
und
$$\Psi\colon T^*M\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{2n} \qquad T_p^*M\ni\omega\mapsto(p,\omega(\frac{\partial}{\partial r^1}|_p),\dots,\omega(\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)).$$

Bemerkung 3.3.10. Die Tangential- und Kotangentialbündel einer Mannigfaltigkeit entstehen beide durch das Zusammensetzen von Vektorräumen, die jeweils zu einem Punkt von M assoziiert sind. Sie besitzen einige gemeinsame Eigenschaften. Im Folgenden sei $(E, \pi, M) \in \{(TM, \pi_{TM}, M), (T^*M, \pi_{T^*M}, M)\}$. Dann gilt:

(i) E ist eine Mannigfaltigkeit und $\pi\colon E \to M$ ist eine glatte surjektive Abbildung.

(ii) Für jedes $p \in E$ ist $\pi^{-1}(\{p\})$ ein n-dimensionaler Vektorraum.

(iii) Für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von p und ein Diffeomorphismus $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\pi_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Abbildung $\pi_U\colon U \times \mathbb{R}^n \to U$ ist durch $(q, x) \mapsto q$ gegeben.

- Für jedes $q \in U$ ist die Abbildung

$$\pi|_{\pi^{-1}(\{q\})} \to \{q\} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

ein Isomorphismus.

Solch ein Tupel (E, π, M) heißt ein glattes Vektorbündel auf M. Die obigen Abbildungen Φ heißen lokale Trivialisierungen. Wir werden Vektorbündel später näher studieren.

Aufgabe 3.3.11. Finden Sie einen Diffeomorphismus $\Phi\colon TS^1 \to S^1 \times \mathbb{R}$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} TS^1 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi_{TS^1}"'] & & S^1 \times \mathbb{R} \arrow[dl, "\pi_{S^1}"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier bezeichnet π_{S^1} die Abbildung, die durch $S^1 \times \mathbb{R} \ni (p, x) \mapsto p \in S^1$ gegeben ist.

3.4 Vektorfelder und 1-Formen

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Sei $(E, \pi, M) \in \{(TM, \pi_{TM}, M), (T^*M, \pi_{T^*M}, M)\}$. Wir untersuchen nun Abbildungen $\sigma\colon M \to E$ mit der Eigenschaft $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$. Die Gleichung besagt nur, dass $\sigma(p)$ für jedes $p \in M$ in $\pi^{-1}(\{p\})$ liegt.

3.4.1 Vektorfelder

Wir studieren jetzt die grundlegenden Eigenschaften von Vektorfeldern. Ihre geometrische und analytische Bedeutung wird erst klar nachdem wir Integralkurven und Flüsse einführen und untersuchen.

Definition 3.4.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein (glattes) *Vektorfeld* auf M ist eine glatte Abbildung $X\colon M \to TM$ mit der Eigenschaft, dass $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_M$. Der Raum aller glatten Vektorfelder auf M wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.

Beispiel 3.4.2. Sei M eine Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Sei $(TU = \pi_{TM}^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ die induzierte Karte. Wir definieren

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \colon U \to TU \qquad p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

Es gilt $\pi_{TU} \circ \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathrm{id}_U$ und

$$\widetilde{\varphi} \circ \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \varphi^{-1}(x) = (x, e_i).$$

Damit sind die Abbildungen $\frac{\partial}{\partial x^i}$ glatte Vektorfelder auf U.

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \colon M \to TM$ eine nicht notwendigerweise glatte Abbildung mit $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_M$. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Für jedes $p \in U$ finden wir $X^i(p) \in \mathbb{R}$, sodass $X(p) = \sum_i X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. So erhalten wir n Funktionen

$$X^i \colon U \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto X^i(p),$$

die wir die *Komponentenfunktionen* von X in der Karte (U, φ) nennen.

Proposition 3.4.3. *Seien M, X wie oben. Die Abbildung X ist genau dann ein glattes Vektorfeld, wenn ihre Komponentenfunktionen $X^i \colon U \to \mathbb{R}$ in allen Karten glatt sind.*

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Sei $(\pi_{TM}^{-1}, \widetilde{\varphi})$ die induzierte Karte für TM. Die Glattheit von $X|_U$ ist äquivalent zur Glattheit von $\widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}$. Es gilt

$$\widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(x) = (x, (X^1 \circ \varphi^{-1})(x), \ldots, (X^n \circ \varphi^{-1})(x)).$$

Die Abbildung $\widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}$ ist also genau dann glatt, wenn die Abbildungen $X^i \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$ glatt sind. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn X^i glatt sind. Die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 3.4.4. Seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei $f \in C^\infty(M)$. Wir definieren $X_1 + X_2, \lambda X_1$ und $f X_1 \in \mathfrak{X}(M)$ punktweise:

$$(X_1 + X_2)(p) = X_1(p) + X_2(p),$$
$$(\lambda X_1)(p) = \lambda X_1(p),$$
$$(f X_1)(p) = f(p) X_1(p).$$

Versehen mit diesen Operationen ist $\mathfrak{X}(M)$ ein $C^\infty(M)$-Modul.

Beispiel 3.4.5. Vielleicht haben Sie in einer Vorlesung zur Vektoranalysis Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$ als glatte Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kennengelernt. Wir erläutern hier die Beziehung zwischen dieser Definition und Definition 3.4.1. Sei $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Wir bezeichnen mit F^i die Abbildung $r^i \circ F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$X := \sum_i F^i \frac{\partial}{\partial r^i}$$

ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Sei umgekehrt $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Wir bezeichnen mit X^i die Komponentenfunktionen von X in der Identitätskarte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^n)$. Die Abbildung

$$F_X \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad p \mapsto (X^1(p), \ldots, X^n(p))$$

ist glatt. So bekommen wir eine 1-zu-1-Korrespondenz zwischen der Menge der glatten Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 3.4.6.

- Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir das Vektorfeld
$$r^1\frac{\partial}{\partial r^2} - r^2\frac{\partial}{\partial r^1}.$$
- Das *Euler-Vektorfeld* auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch
$$\sum_i r^i\frac{\partial}{\partial r^i}$$
.

Bevor wir ein weiteres Kriterium für die Glattheit von Abbildungen $X\colon M \to TM$ mit der Eigenschaft $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_M$ geben, beweisen wir eine sehr nützliche Aussage zur Konstruktion glatter lokaler Erweiterungen von Funktionen, die auf einer Teilmenge einer Mannigfaltigkeit definiert sind.

Proposition 3.4.7. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $U \subset M$ offen. Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Für jedes $p \in U$ existiert eine glatte Funktion $\widetilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$, die auf einer offenen Umgebung $V \subset U$ von p mit f übereinstimmt.*

Beweis. Wir wählen eine offene Umgebung V von p so, dass $\overline{V} \subset U$. Wegen Korollar 2.5.10 existiert eine Funktion $\eta \in C^\infty(M)$ mit den Eigenschaften

- $\eta|_V \equiv 1$,
- $\operatorname{supp}\eta \subset U$.

Wir definieren
$$\widetilde{f}\colon M \to \mathbb{R} \qquad q \mapsto \begin{cases} \eta(q)f(q) & \textit{für } q \in U \\ 0 & \textit{für } q \notin U. \end{cases}.$$

Die Funktion $\widetilde{f}$ stimmt auf der offenen Umgebung V mit f überein. Weiterhin ist sie eingeschränkt auf U das Produkt der glatten Funktionen η und f und damit glatt. Andererseits verschwindet $\widetilde{f}$ auf $M \setminus \operatorname{supp}\eta$ und ist damit dort glatt. Da jedes $q \in M$ entweder in der offenen Menge U oder in der offenen Menge $M \setminus \operatorname{supp}\eta$ enthalten ist, folgt daraus, dass $\widetilde{f}$ glatt ist. □

Bemerkung 3.4.8. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Seien $X, Y \in T_pM$. Falls $X(f) = Y(f)$ für alle $f \in C^\infty(M)$, dann gilt $X = Y$. In der Tat: Sei $[f\colon U \to \mathbb{R}] \in G_p^\infty$. Dann existiert eine glatte Funktion $\widetilde{f}$ auf M, die in einer offenen Umgebung von p mit f übereinstimmt. Es gilt
$$X([f]) = X([\widetilde{f}]) = Y([\widetilde{f}]) = Y([f]).$$

Seien M und X wie oben. Für $p \in M$ schreiben wir häufiger X_p statt $X(p)$. Für jedes $f \in C^\infty(M)$ definieren wir eine Abbildung
$$X(f)\colon M \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto X_p(f).$$

Proposition 3.4.9. *Seien M und X wie oben. X ist genau dann ein glattes Vektorfeld, wenn für jedes $f \in C^\infty(M)$ die Abbildung*
$$X(f)\colon M \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto X_p(f)$$
eine glatte Abbildung ist.

Beweis. Sei X glatt und sei $f \in C^\infty(M)$. Wir zeigen, dass $X(f)$ eingeschränkt auf den Definitionsbereich jeder Karte glatt ist. Daraus folgt die Behauptung. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Wir bezeichnen mit X^i die Komponentenfunktionen von X in der Karte (U, φ). Es gilt

$$X(f)|_U = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f).$$

Daraus erhalten wir

$$X(f) \circ \varphi^{-1} = \sum_i X^i \circ \varphi^{-1} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}.$$

Daraus folgt die Glattheit von $X(f)|_U$.

Sei nun umgekehrt X so, dass $X(f)$ für jedes $f \in C^\infty(M)$ glatt ist. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Wir zeigen, dass die Komponentenfunktionen $\{X^i\}_{1 \le i \le n}$ von X in der Karte (U, φ) glatt sind. Dafür zeigen wir, dass für jedes $p \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von p existiert, sodass $X^i|_V$ glatt ist. Sei $p \in U$. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ finden wir eine glatte Funktion $\widetilde{x^i}$, die in einer offenen Umgebung $V \subset U$ von p mit x^i übereinstimmt. Die Funktion $X(\widetilde{x^i})$ ist nach Voraussetzung glatt. Es gilt

$$X(\widetilde{x^i})|_V = \sum_j X^j|_V \frac{\partial}{\partial x^j}|_V (\widetilde{x^i}|_V) = \sum_j X^j|_V \frac{\partial}{\partial x^j}|_V (x^i) = X^i|_V.$$

Die Funktion $X^i|_V$ ist damit glatt. Die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 3.4.10. Wegen Proposition 3.4.9 induziert jedes Vektorfeld X eine lineare Abbildung

$$D_X \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M) \qquad f \mapsto X(f).$$

Für $f, g \in C^\infty(M)$ gilt

$$D_X(fg) = g D_X(f) + f D_X(g),$$

da für jedes $p \in M$

$$D_X(fg)(p) = X_p(fg) = g(p) X_p(f) + f_p X_p(g).$$

Definition 3.4.11. Eine lineare Abbildung $D \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $f, g \in C^\infty(M)$

$$D(fg) = g D(f) + f D(g)$$

gilt, heißt eine *($C^\infty(M)$-wertige) Derivation von* $C^\infty(M)$.

Wir haben gesehen, dass jedes Vektorfeld eine Derivation von $C^\infty(M)$ induziert. Die folgende Proposition besagt, dass jede Derivation von $C^\infty(M)$ von einem Vektorfeld induziert wird.

Proposition 3.4.12. *Sei $D \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ eine Derivation von $C^\infty(M)$. Dann existiert genau ein (glattes) Vektorfeld X mit $D = D_X$, wobei wir hier die in der Bemerkung 3.4.10 eingeführten Notation benutzen.*

Beweis. Sei $p \in M$. Wir definieren

$$X_p \colon G_p^\infty \to \mathbb{R}$$

wie folgt: Sei $[f] \in G_p^\infty$. Wähle eine glatte Funktion $\widetilde{f}$, die auf einer offenen Umgebung von p mit f übereinstimmt. $\left(D(\widetilde{f})\right)(p)$ ist von der Wahl von $\widetilde{f}$ (**Aufgabe**). Wir setzen

$$X_p([f]) = \left(D(\widetilde{f})\right)(p).$$

Die Abbildung X_p ist eine Derivation von G_p^∞ (**Aufgabe**) und damit ein Tangentialvektor an der Stelle p. Die Abbildung

$$X\colon M \to TM \qquad p \mapsto X_p$$

ist ein glattes Vektorfeld und es gilt $D = D_X$ (**Aufgabe**). X ist das einzige Vektorfeld mit $D = D_X$ (**Aufgabe**). □

Mithilfe der Proposition 3.4.12 könne wir für eine Mannigfaltigkeit M den Raum der Derivationen von $C^\infty(M)$ mit $\mathfrak{X}(M)$ identifizieren. Ab jetzt werden wir, mit etwas Notationsmissbrauch, die durch ein Vektorfeld X induzierte Derivation wieder mit X (statt D_X) bezeichnen.

Vektorfelder und das Differential

Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei X ein Vektorfeld auf M. Definiert die Abbildung $N \to TN$, die $F(p) \in N$ auf $F_*(X_p)$ abbildet, ein Vektorfeld auf N? I. Allg. ist die Antwort negativ: Falls F nicht surjektiv ist, ist die obige Abbildung nicht überall auf N definiert und falls F nicht injektiv ist, kann es sein, dass ein Punkt $q = F(p_1) = F(p_2)$ auf zwei unterschiedliche Tangentialvektoren abgebildet wird. Es ist trotzdem möglich zu definieren, wann zwei Vektorfelder X und Y auf M bzw. N miteinander „F-verwandt“ sind.

Definition 3.4.13. Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Zwei Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$ heißen F-verwandt, falls

$$F_* \circ X = Y \circ F.$$

Lemma 3.4.14. *Wir benutzen die Notation aus Definition 3.4.13. X und Y sind genau dann F-verwandt, wenn für alle Funktionen $f \in C^\infty(N)$ gilt*

$$X(f \circ F) = Y(f) \circ F.$$

Beweis. Seien X und Y F-verwandt. Sei $p \in M$. Wir haben

$$(X(f \circ F))(p) = X_p(f \circ F) = (F_*(X_p))(f) = \left(Y_{F(p)}\right)(f) = Y(f)_{F(p)} = (Y(f) \circ F)(p).$$

Seien nun umgekehrt X und Y so, dass für alle $f \in C^\infty(M)$

$$X(f \circ F) = Y(f) \circ F$$

gilt. Wir zeigen, dass für alle $p \in M$ und alle $f, g \in C^\infty(M)$

$$(F_*(X_p))(f) = \left(Y_{F(p)}\right)(f)$$

(siehe Bemerkung 3.4.8). Es gilt

$$(F_*(X_p))(f) = X_p(f \circ F) = (X(f \circ F))(p) = (Y(f) \circ F)(p) =$$
$$Y(f)_{F(p)} = \left(Y_{F(p)}\right)(f).$$

Die Behauptung folgt.

□

Beispiel 3.4.15. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $U \subset M$ offen. Wir bezeichnen mit $\iota\colon U \to M$ die Inklusionsabbildung. Sei X ein Vektorfeld auf M. Wir betrachten die Einschränkung $X|_U$, mithilfe der Identifikation $TU = \pi^{-1}|_{TM}$, als ein Vektorfeld auf U. Tautologischerweise sind die Vektorfelder $X|_U$ und X ι-verwandt.

Beispiel 3.4.16. Sei $r := r^1$ die Standard-Koordinatenfunktion auf $\mathbb{R}$. Betrachte die glatte Abbildung

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad p \mapsto (\cos p, \sin p)$$

und das Vektorfeld

$$X := r^1 \frac{\partial}{\partial r^2} - r^2 \frac{\partial}{\partial r^1}$$

auf $\mathbb{R}^2$. Die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial r}$ und X sind F-verwandt.

Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Für ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ existiert i. Allg. kein Vektorfeld Y auf N, sodass X und Y F-verwandt sind.

Aufgabe 3.4.17. Sei $\iota\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ die Inklusionsabbildung. Finden Sie ein glattes Vektorfeld auf $(-1,1)$, sodass kein $Y \in \mathfrak{X}(M)$ existiert mit der Eigenschaft, dass X und Y ι-verwandt sind.

Falls F ein Diffeomorphismus ist, ist die Situation anders.

Proposition 3.4.18. *Sei $F\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus. Sei X ein Vektorfeld auf M. Dann existiert ein eindeutiges Vektorfeld Y auf N, sodass X und Y F-verwandt sind.*

Beweis. Falls ein Vektorfeld Y auf N existiert, sodass X und Y F-verwandt sind, gilt

$$Y(q) = F_*(X_{F^{-1}(q)})$$

für alle $q \in N$. Damit ist Y eindeutig. Für die Existenz benutzen wir die obige Formel, um Y zu definieren. Um zu sehen, dass das so definierte Vektorfeld glatt ist, bemerken wir, dass Y durch die Komposition

$$N \xrightarrow{F^{-1}} M \xrightarrow{X} TM \xrightarrow{F_*} TN$$

gegeben ist und dass F^{-1} und F_* glatt sind. $\square$

Bemerkung 3.4.19. Wir bezeichnen manchmal das Vektorfeld Y, das in Proposition 3.4.18 konstruiert wurde, mit $F_*(X)$. Diese Notation kann zugegeben etwas verwirrend sein.

Kommutator von Vektorfelder

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Der Raum $\mathfrak{X}(M)$ hat mehr Struktur, als wir bis jetzt betrachtet haben. Wir definieren eine bilineare anti-symmetrische Operation

$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

deren geometrische Bedeutung wir erst später, nach der Einführung des Konzepts des Flusses eines Vektorfelds, diskutieren werden.

Seien X und Y (glatte) Vektorfelder auf M (die wir gleichzeitig als Derivationen von $C^\infty(M)$) betrachten.

Proposition 3.4.20. *X und Y wie oben. Die Abbildung*

$$[X,Y]\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M) \qquad f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$$

ist eine Derivation.

Beweis. Für $f, g \in C^\infty(M)$ gilt:

$$[X,Y](fg) = X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(gY(f) + fY(g)) - Y(gX(f) + fX(g)) =$$

$$gX(Y(f))+Y(f)X(g)+fX(Y(g))+Y(g)X(f)-(gY(X(f)) + X(f)Y(g) + fY(X(g)) + X(g)Y(f))$$
$$= g\,(X(Y(f)) - Y(X(f))) + f\,(X(Y(f)) - Y(X(f))) = g[X,Y](f) + f[X,Y](g).$$

□

Definition 3.4.21. Sei M eine Mannigfaltigkeit und seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Das in Proposition 3.4.20 definierte Vektorfeld $[X,Y]$ heißt der *Kommutator* oder die *Lie-Klammer* von X und Y. Insbesondere gilt für jedes $p \in M$ und $f \in C^\infty(M)$, dass

$$[X,Y]_p(f) = X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).$$

Proposition 3.4.22. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten und $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Seien $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ so, dass X_i und Y_i F-verwandt sind. Dann sind $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ auch F-verwandt.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$F_* \circ [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ F.$$

Dafür zeigen wir für $p \in M$ und $f \in C^\infty(N)$, dass

$$F_*([X_1, X_2]_p)(f) = [Y_1, Y_2]_{F(p)}(f).$$

Es gilt

$$F_*([X_1, X_2]_p)(f) = [X_1, X_2]_p(f \circ F) = (X_1)_p(X_2(f \circ F)) - (X_2)_p(X_1(f \circ F)) =$$

$$(X_1)_p((Y_2(f) \circ F)) - (X_2)_p((Y_1(f) \circ F)) = (F_* \circ X_1)_p(Y_2(f)) - (F_* \circ X_2)_p(Y_1(f)) =$$
$$(Y_1 \circ F)(p)(Y_2(f)) - (Y_2 \circ F)(p)(Y_1(f)) =$$
$$(Y_1)_{F(p)}(Y_2(f)) - (Y_2)_{F(p)}(Y_1(f)) = [Y_1, Y_2]_{F(p)}(f).$$

Die Behauptung folgt. □

Mithilfe der Proposition 3.4.22 und Beispiel 3.4.15 erhalten wir das folgende

Korollar 3.4.23. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $U \subset M$ offen. Für Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$[X,Y]|_U = [X|_U, Y|_U].$$

Aufgabe 3.4.24. Sei M eine Mannigfaltigkeit.

(i) Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Finden Sie die Komponentenfunktionen von $[X,Y]$ in einer Karte mithilfe der Komponentenfunktionen der Vektorfelder X und Y.

(ii) Sei (U,φ) eine Karte mit Koordinatenfunktionen $\{x^i\}_{1\leq n}$. Zeigen Sie, dass

$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0.$$

Bemerkung 3.4.25. Die Abbildung

$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) \qquad (X,Y) \mapsto [X,Y]$$

hat die folgenden Eigenschaften:

- Sie ist bilinear.
- Sie ist anti-symmetrisch: Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt $[X,Y] = -[Y,X]$.
- Sie erfüllt die Jacobi-Identität: Für $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0.$$

Ein Vektorraum mit einer bilinearen, anti-symmetrischen Operation, die die Jacobi-Identität erfüllt, heißt eine *Lie-Algebra*. Damit ist $\mathfrak{X}(M)$ versehen mit der Kommutator-Operation eine Lie-Algebra. Zusätzlich gilt für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f, g \in C^\infty(M)$

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + (fX(g))Y - g(Y(f))X.$$

Aufgabe 3.4.26. Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Wir bezeichnen mit $\pi_M\colon M \times N \to M$ und $\pi_N\colon M \times N \to N$ die Projektionsabbildungen auf M bzw. N. Wir benutzen den Isomorphismus aus Aufgabe 3.2.18. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Betrachten Sie die Vektorfelder

$$\widetilde{X}\colon M \times N \to T(M \times N) \qquad (p,q) \mapsto (X_p, 0)$$

sowie

$$\widetilde{Y}\colon M \times N \to T(M \times N) \qquad (p,q) \mapsto (0, Y_q)$$

und zeigen Sie, dass $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = 0$.

3.4.2 1-Formen

Definition 3.4.27. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine (glatte) 1-*Form* (oder glattes *Kovektorfeld*) auf M ist eine glatte Abbildung $\omega\colon M \to T^*M$ mit der Eigenschaft, dass $\pi_{T^*M} \circ X = \mathrm{id}_M$. Der Raum aller glatten 1-Formen auf M wird mit $\Omega^1(M)$ bezeichnet.

Beispiel 3.4.28. Sei M eine Mannigfaltigkeit und (U,φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Sei $(T^*U = \pi_{T^*M}^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ die induzierte Karte. Wir definieren

$$\mathrm{d}x^i\colon U \to T^*U \qquad p \mapsto \mathrm{d}x^i|_p.$$

Wir haben $\pi_{T^*U} \circ \mathrm{d}x^i = \mathrm{id}_U$ und

$$\widetilde{\varphi} \circ \mathrm{d}x^i \circ \varphi^{-1}(x) = (x, e_i).$$

Damit sind die Abbildungen $\mathrm{d}x^i$ glatte 1-Formen auf U.

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\omega\colon M \to T^*M$ eine nicht notwendigerweise glatte Abbildung mit $\pi_{T^*M} \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Für jedes $p \in U$ finden wir $\omega_i(p) \in \mathbb{R}$, sodass $\omega(p) = \sum_i \omega_i(p) \mathrm{d}x^i|_p$. So erhalten wir n Funktionen

$$\omega_i\colon U \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \omega_i(p),$$

die wir die *Komponentenfunktionen* von ω in der Karte (U, φ) nennen.

Proposition 3.4.29. *Seien M, ω wie oben. Die Abbildung ω ist genau dann eine glatte 1-Form, wenn ihre Komponentenfunktionen $\omega_i\colon U \to \mathbb{R}$ in allen Karten glatt sind.*

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Sei $(\pi^{-1}_{T^*M}, \widetilde{\varphi})$ die induzierte Karte für T^*M. Die Glattheit von $\omega|_U$ ist äquivalent zur Glattheit von $\widetilde{\varphi} \circ \omega \circ \varphi^{-1}$. Es gilt

$$\widetilde{\varphi} \circ \omega \circ \varphi^{-1}(x) = (x, (\omega_1 \circ \varphi^{-1})(x), \ldots, (\omega_n \circ \varphi^{-1})(x)).$$

Die Abbildung $\widetilde{\varphi} \circ \omega \circ \varphi^{-1}$ ist also genau dann glatt, wenn die Abbildungen $\omega_i \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$ glatt sind. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn ω^i glatt sind. Die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 3.4.30. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Die Abbildung

$$\mathrm{d}f\colon M \to T^*M \qquad p \mapsto (\mathrm{d}f)_p$$

erfüllt $\pi_{T^*M} \circ \mathrm{d}f = \mathrm{id}_M$. Zusätzlich ist diese Abbildung glatt: Die Komponentenfunktionen von $\mathrm{d}f$ in einer Karte (U, φ) mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ sind die Funktionen $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(f), \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}(f)\}$ und sind damit glatt. Wir nennen $\mathrm{d}f$ das totale Differential von f.

Bemerkung 3.4.31. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(M)$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei $f \in C^\infty(M)$. Wir definieren $\omega_1 + \omega_2$, $\lambda\omega_1$ und $f\omega_1 \in \Omega^1(M)$ punktweise:

$$(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p),$$

$$(\lambda\omega_1)(p) = \lambda\omega_1(p),$$
$$(f\omega_1)(p) = f(p)\omega_1(p).$$

$\Omega^1(M)$, versehen mit diesen Operationen ist ein $C^\infty(M)$-Modul.

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\omega\colon M \to T^*M$ eine nicht notwendigerweise glatte Abbildung mit $\pi_{T^*M} \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Für $p \in M$ schreiben wir häufiger ω_p statt $\omega(p)$. Für jedes $X \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir eine Abbildung

$$\omega(X)\colon M \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \omega_p(X_p).$$

Proposition 3.4.32. *Seien M und ω wie oben. ω ist genau dann eine glatte 1-Form, wenn für jedes $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung*

$$\omega(X)\colon M \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \omega_p(X_p)$$

glatt ist.

Für den Beweis von Proposition 3.4.32 benötigen wir das Ergebnis der folgenden

Aufgabe 3.4.33. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $U \subset M$ offen. Sei X ein glattes Vektorfeld auf U. Für jedes $p \in U$ existiert ein glattes Vektorfeld $\widetilde{X}$ auf M, das in einer offenen Umgebung von p mit X übereinstimmt.

Beweis von Proposition 3.4.32. Sei ω glatt. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Wir zeigen, dass $\omega(X)$ eingeschränkt auf dem Definitionsbereich jeder Karte von M glatt ist. Sei (U, φ) eine Karte mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Seien $\{\omega_i\}$ und $\{X^i\}$ die Komponentenfunktionen von ω und X in der Karte (U, φ). Dann gilt

$$\omega(X)|_U = \sum_i \omega_i \mathrm{d}x^i(\sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_{i,j} \omega_i X^j \mathrm{d}x^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_i \omega_i X^i.$$

Damit ist $\omega(X)|_U$, als eine Summe von Produkten aus glatten Funktionen glatt.

Sei nun umgekehrt ω so, dass $\omega(X)$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ glatt ist. Sei (U, φ) eine Karte auf M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$ und $p \in U$. Wir bezeichnen mit ω_i, die Komponentenfunktionen von ω in dieser Karte. Wähle für jedes $1 \leq i \leq n$ ein Vektorfeld $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}}$, das in einer offenen Umgebung V von p mit $\frac{\partial}{\partial x^i}$ übereinstimmt. Es gilt

$$\omega(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^j}})|_V = \sum_i \omega_i|_V(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^j}}|_V) = \sum_i \omega_i|_V(\frac{\partial}{\partial x^i}|_V) = \omega_j|_V.$$

Die Funktion ω_j ist damit glatt. Die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 3.4.34. Wegen Proposition 3.4.32 induziert jede 1-Form ω eine lineare Abbildung

$$L_\omega \colon \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \qquad X \mapsto \omega(X).$$

Für $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$L_\omega(fX) = f L_\omega(X),$$

da für $p \in M$

$$\omega(fX)(p) = \omega_p(f(p)X(p)) = f(p)\omega_p(X(p)).$$

Mit anderen Worten: Die Abbildung L_ω ist eine $C^\infty(M)$-Modul Homomorphismus.

Proposition 3.4.35. *Sei $L \colon \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ ein $C^\infty(M)$-Modul-Homomorphismus. Dann existiert genau eine 1-Form ω mit $L = L_\omega$. Wir benutzen hier die Notation aus Bemerkung 3.4.34.*

Zuerst beweisen wir ein

Lemma 3.4.36. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Sei $X_p \in T_pM$. Dann existiert ein glattes Vektorfeld auf M mit $X(p) = X_p$.*

Beweis von Lemma 3.4.36. Sei (U, φ) eine Karte für M um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Für geignetes $\xi^i \in \mathbb{R}$ gilt $X_p = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Wir definieren $Y \in \mathfrak{X}(U)$ durch

$$Y = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Nach Aufgabe 3.4.33 existiert ein Vektorfeld X auf M, das in einer offenen Umgebung von p mit Y übereinstimmt. Insbesondere gilt in diesem Fall $X(p) = X_p$. $\square$

Beweis von Proposition 3.4.35. Sei $p \in M$. Wir zeigen zuerst, dass für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X_p = Y_p$ gilt $L(X)(p) = L(Y)(p)$. In der Tat: Sei (U, φ) eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Sei V eine offene Umgebung von p mit $\overline{V} \subset U$. Sei η eine glatte Funktion auf M mit $\eta|_V \equiv 1$ und $\operatorname{supp} \eta \subset U$. Es gilt

$$L(X)(p) - L(Y)(p) = L(X - Y)(p) = \eta^2 L(X - Y)(p) = L(\eta^2(X - Y))(p).$$

Auf U gilt $X - Y = \sum F^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ für geeignete Funktionen F^i. Da $X_p = Y_p$, gilt zusätzlich $F^i(p) = 0$ für $1 \leq i \leq n$. Wir bezeichnen mit $\widetilde{F^i}$ die glatte Funktion auf M, die auf U durch ηF^i gegeben ist und außerhalb von U verschwindet. Weiterhin bezeichnen wir mit $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ das Vektorfeld auf M, das auf U mit $\eta \frac{\partial}{\partial x^i}$ übereinstimmt und außerhalb von U verschwindet. Dann gilt

$$\eta^2(X - Y) = \sum_i \widetilde{F^i} \widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}}$$

und wir erhalten

$$L(\eta^2(X - Y))(p) = L(\sum_i \widetilde{F^i} \widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}})(p) = \sum_i \widetilde{F^i} L(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^i}})(p) = 0,$$

da $\widetilde{F^i}(p) = F^i(p) = 0$. Wir definieren einen Kotangentialvektor $\omega_p \in T_p^*M$ wie folgt: Für $X_p \in T_pM$ wählen wir ein Vektorfeld X mit $X(p) = X_p$ und setzen $\omega_p(X_p) := L(X)(p)$. Wegen der obigen Beobachtung ist die Zahl $L(X)(p)$ unabhängig von Wahl des Vektorfelds X. Wir definieren die lineare Abbildung

$$\omega_p \colon T_pM \to \mathbb{R} \qquad X_p \mapsto \omega_p(X_p)$$

und

$$\omega \colon M \to T^*M \qquad p \mapsto \omega_p.$$

Dann gilt für jedes $X \in \mathfrak{X}(M)$, dass $L(X) = \omega(X)$. Wegen dieser Gleichung und Proposition 3.4.32 ist ω zusätzlich glatt und damit eine 1-Form. Der Beweis der Eindeutigkeit ist eine **Aufgabe**. □

1-Formen und das Kodifferential

Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F \colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Für jedes $p \in M$ wurde das Kodifferential $(F^*)_{F(p)}$ von F an der Stelle $F(p)$ als die duale Abbildung zum $(F_*)_p$ definiert. Für $\omega \colon N \to T^*N$ mit $\pi_{T^*M} \circ \omega = \mathrm{id}_M$ definieren wir

$$F^*(\omega) \colon M \to T^*M \qquad p \mapsto (F^*)_{F(p)}(\omega_{F(p)}).$$

Wir nennen diese Abbildung der *Pullback* von ω unter der Abbildung F. Die folgende Proposition ist für die Berechnung des Pullbacks von 1-Formen sehr hilfreich.

Proposition 3.4.37. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F \colon M \to N$ eine glatte Abbildung.*

1. *Für $\omega \in \Omega^1(N)$ und $g \in C^\infty(N)$ gilt*

$$F^*(g\omega) = (g \circ F)F^*(\omega).$$

2. *Für $f \in C^\infty(N)$ gilt*
$$F^*(df) = d(f \circ F).$$

Beweis.

1. Für $p \in M$ gilt
$$F^*(g\omega)(p) = (F^*)_{F(p)}\left(g(F(p))\omega_{F(p)}\right) = g(F(p))(F^*)_{F(p)}(\omega_{F(p)}) = ((g \circ F)F^*(\omega))\,(p)$$

2. Folgt sofort aus Proposition 3.2.16.

$\square$

Bemerkung 3.4.38. In der Situation von Proposition 3.4.37 gilt insbesondere, dass $F^*(\mathrm{d}f)$ glatt ist.

Proposition 3.4.39. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $\omega \in \Omega^1(N)$. Dann ist $F^*(\omega)$ glatt und damit eine 1-Form.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Einschränkung von $F^*(\omega)$ auf eine geeignete offene Umgebung jedes Punkts $p \in M$ glatt ist. Sei $p \in M$ und sei (V, ψ) eine Karte um $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Wir bezeichnen mit ω_i die Komponentenfunktionen von ω in der Karte (V, ψ). Da F stetig ist, ist die Menge $U := F^{-1}(V)$ offen. Für $p \in U$ gilt
$$F^*(\omega)(p) = (F^*)_{F(p)}\left(\sum_i \omega_i(F(p))\mathrm{d}x^i|_{F(p)}\right) = \sum_i (\omega_i \circ F)(p)\mathrm{d}x^i \circ F(p).$$
Also
$$F^*(\omega)|_U = \sum_i (\omega_i \circ F)\mathrm{d}(x^i \circ F)$$
und ist damit glatt. $\square$

3.5 Der Fall von Mannigfaltigkeiten mit Rand

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Konzepte (Ko-)Tangentialraum, Differential und (Ko-)Tangentialbündel auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Im randlosen Fall haben wir zuerst eine geometrische Beschreibung der Tangentialvektoren gegeben und haben dann gesehen, dass Tangentialvektoren an einem Punkt einer glatten Mannigfaltigkeit als Derivationen des Raums der Funktionskeime an dem Punkt definiert werden können. Die Definitionen im Fall von berandeten Mannigfaltigkeiten sind fast identisch. Wir werden aber einfachheitshalber zuerst mit der algebraischen Definition arbeiten und dann sehen, wie Kurven auf Mannigfaltigkeiten mit Rand Tangentialvektoren induzieren.

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $p \in M$. Der Raum $GC_p^\infty(M)$ *der Funktionskeime an* p ist, genau wie im randlosen Fall, der Raum der Äquivalenzklassen von glatten Funktionen, die in einer offenen Umgebung von p definiert sind, wobei zwei solcher Funktionen genau dann äquivalent sind, wenn sie in einer Umgebung von p übereinstimmen. Mit der üblichen Operationen ist $GC_p^\infty(M)$, wie im randlosen Fall, eine Algebra. Ein *Tangentialvektor an* p ist eine Derivation der Algebra $GC_p^\infty(M)$. Also eine lineare Abbildung $X\colon GC_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ mit
$$X([f][g]) = g(p)X([f]) + f(p)X([g])$$

für alle $[f], [g] \in GC_p^\infty(M)$. Der Raum aller Tangentialvektoren an p heißt der *Tangentialraum* von M an der Stelle p und wird mit T_pM bezeichnet. Der Dualraum zum T_pM heißt der *Kotangentialraum* von M an p und wird mit T_p^*M bezeichnet. Elemente von T_p^*M heißen *Kotangentialvektoren* Falls $\partial M = \emptyset$ stimmen diese Räume mit dem vorher definierten Tangential- und Kotangentialraum für Mannigfaltigkeiten überein.

Sei N eine weitere Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Das *Differential* von F im Punkt p ist die lineare Abbildung

$$(F_*)_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N \qquad X \mapsto ([f] \mapsto X(f \circ F)).$$

Die duale Abbildung zum $(F_*)_p$ heißt das *Kodifferential* von F am Punkt $F(p)$:

$$(F^*)_{F(p)}\colon T^*_{F(p)}N \to T_p^*M \qquad \omega \mapsto (X \mapsto \omega((F_*)_p(X)))\,.$$

Falls $\partial M = \partial N = \emptyset$ stimmen diese Abbildungen mit der in Definition 3.2.1 und 3.2.12 eingeführten Abbildungen überein. Der Beweis der folgenden Proposition ist identisch zu dem von Proposition 3.2.14.

Proposition 3.5.1. *Seien M, N und P Mannigfaltigkeiten mit Rand und seien $F\colon M \to N$ und $G\colon N \to P$ glatte Abbildungen. Sei $p \in M$. Dann gelten:*

$$((G \circ F)_*)_p = (G_*)_{F(p)} \circ (F_*)_p$$

und

$$((G \circ F)^*)_{G(F(p))} = (F^*)_{F(p)} \circ (G^*)_{G(F(p))}.$$

Korollar 3.5.2. Seien M und N Mannigfaltigkeiten mit Rand und sei $F\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus. Dann ist für jedes $p \in M$ das Differential $(F_*)_p$ im Punkt p invertierbar mit der Inverse $(F_*^{-1})_{F(p)}$.

Tangentialraum an einem inneren Punkt

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $p \in M^\circ$. Wie wir wissen, ist M° auf natürliche Weise eine Mannigfaltigkeit. Die Einschränkungsabbildung

$$\mathrm{res}\colon G_p^\infty(M) \to G_p^\infty(M^\circ) \qquad [f : V \to \mathbb{R}] \mapsto [f|_{M^\circ \cap V}]$$

ist ein Isomorphismus von Algebren. Daher ist die Abbildung

$$T_pM^\circ \to T_pM \qquad X \mapsto ([f] \mapsto X(\mathrm{res}([f])))$$

ein (kanonischer) Isomorphismus. Damit ist T_pM ein n-dimensionaler Vektorraum, den wir kanonischerweise mit T_pM° identifizieren können. Wir bemerken, dass dieser Isomorphismus nichts anderes ist als das Differential der Inklusionsabbildung $\iota\colon M^\circ \to M$. Wie im randlosen Fall, können wir Karten für M um p benutzen um eine Basis von T_pM zu definieren: Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Da $p \in M^\circ$ und $M^\circ \subset M$ offen ist, sind die Kurven

$$\gamma_i\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M \qquad t \mapsto \varphi^{-1}(x_0 + te_i)$$

für ein hinreichend kleines ϵ wohldefiniert und ihr Bild liegt in M°. Wir definieren $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$ durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p[f] = \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma_i)}{\mathrm{d}t}|_{t=0}.$$

Einfache Überlegungen wie im randlosen Fall zeigen, dass $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}{}_p\}$ eine Basis von T_pM ist. Die dazu duale Basis bezeichnen wir mit $\{\mathrm{d}x^1|_p, \dots, \mathrm{d}x^n|_p\}$.

Tangentialraum an einem Randpunkt

Wir betrachten zuerst den Tangentialraum an einem Punkt $p \in \partial\mathbb{H}^n$.

Proposition 3.5.3. *Sei $p \in \partial\mathbb{H}^n$. Die lineare Abbildung*

$$T_p\mathbb{H}^n \to T_p\mathbb{R}^n \qquad X \mapsto ([f : V \to \mathbb{R}] \mapsto X([f|_{\mathbb{H}^n\cap V}]))$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist $T_p\mathbb{H}^n$ ein n-dimensionaler Vektorraum.

Die Abbildung in Proposition 3.5.3 ist nichts anderes als das Differential der Inklusionsabbildung $\iota \colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$. Wir werden entsprechend im Beweis dieser Proposition die obige Abbildung mit $(\iota_*)_p$ bezeichnen.

Beweis der Proposition 3.5.3.

- Injektivität: Sei $X \in T_p\mathbb{H}^n$ und $X \neq 0$. Dann existiert eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, definiert auf einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{H}^n$ von p, sodass $X([f]) \neq 0$. Die Glattheit von f impliziert weiterhin die Existenz einer Funktion $\widetilde{f} \colon V \to \mathbb{R}$, die auf einer offenen Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von p definiert ist und auf $U \cap V$ mit f übereinstimmt. Es gilt

  $$((\iota_*)_p(X))\,([\widetilde{f}]) = X([\widetilde{f}|_{\mathbb{H}^n\cap V}]) = X([\widetilde{f}|_{U\cap V}]) = X([f]) \neq 0.$$

  Die Injektivität von $(\iota_*)_p$ folgt.

- Surjektivität: Sei $\widetilde{X} \in T_p\mathbb{R}^n$. Dann existieren $\xi^i \in \mathbb{R}$, sodass $\widetilde{X} = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial r^i}|_p$. Sei $[f \colon U \to \mathbb{R}] \in GC_p^\infty(\mathbb{H}^n)$. Dann existiert eine Funktion $\widetilde{f} \colon V \to \mathbb{R}$, die auf einer offenen Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von p definiert ist und auf $U \cap V$ mit f übereinstimmt. Wir setzen

  $$X([f]) = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial r^i}|_p(\widetilde{f}) = \sum_i \xi^i \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r^i}(p).$$

  Wir bemerken, dass $\sum_i \xi^i \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r^i}(p)$, aufgrund der Stetigkeit von $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r^i}$, durch die Einschränkung von $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r^i}$ auf eine beliebig kleine Umgebung von p in $\mathbb{H}^n$ bestimmt werden kann. $X([f])$ ist damit weder von der Wahl der Erweiterung $\widetilde{f}$, noch von der Wahl eines Repräsentanten f des Keims $[f]$ abhängig. Wir erhalten eine Abbildung

  $$X \colon GC_p^\infty(\mathbb{H}^n) \to \mathbb{R}.$$

  Es ist leicht zu sehen, dass X eine Derivation von $G_p^\infty(\mathbb{H}^n)$ ist und dass $(\iota_*)_p(X) = \widetilde{X}$. □

Korollar 3.5.4. Sei M eine n- dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $p \in \partial M$. Der Tangentialraum T_pM ist n-dimensional.

Beweis. Wie im Beispiel 2.4.17, kann man zeigen, dass jede Karte $(U, \varphi \colon U \to V)$ für M um p ein Diffeomorphismus ist. Aus Korollar 3.5.2 folgt, dass $(\varphi_*)_p \colon T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n$ ein Isomorphismus ist. Die Behauptung folgt aus Proposition 3.5.3. □

Bemerkung 3.5.5. Mithilfe der Proposition 3.5.3 sieht man, dass die Aussage der Proposition 3.2.17 für Mannigfaltigkeiten mit Rand i. Allg. nicht gilt. In der Tat: Für jedes $p \in \partial\mathbb{H}^n$ ist das Differential $(\iota_*) \colon T_p\mathbb{H}^n \to T_p\mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. Für eine beliebige offene Umgebung $U \subset \mathbb{H}^n$ des Punkts p in $\mathbb{H}^n$ ist $\iota(U)$ nicht offen und $\iota|_U \colon U \to U$ kein Diffeomorphismus.

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $p \in \partial M$. Jetzt sehen wir, wie man mithilfe einer Karte um p eine Basis für T_pM konstruieren kann. Die Konstruktionen sind fast identisch zu denen im randlosen Fall. Sei (U, φ) eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Für $1 \leq i \leq n-1$ betrachten wir die Kurven

$$\gamma_i \colon (-\epsilon, \epsilon) \to M \qquad t \mapsto \varphi^{-1}(x_0 + te_i)$$

für hinreichend kleines ϵ und definieren $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$ durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p[f] = \frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma_i)}{\mathrm{d}t}|_{t=0}.$$

Weiterhin betrachten wir die Kurve

$$\gamma_n \colon [0, \epsilon) \to M \qquad t \mapsto \varphi^{-1}(x_0 + te_i) \tag{$*$}$$

und definieren $\frac{\partial}{\partial x^n}|_p \in T_pM$ durch

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p[f] = \lim_{t \to 0^+} \frac{(f \circ \gamma_n)(t) - (f \circ \gamma_n)(0)}{t}.$$

Wir bemerken, dass $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ mittels des Isomorphismus

$$T_pM \xrightarrow{(\varphi_*)_p} T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n,$$

wobei $T_{\varphi(p)}\mathbb{H}^n \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ der Isomorphismus aus Proposition 3.5.3 ist, mit $\frac{\partial}{\partial r^i}|_{\varphi(p)}$ identifiziert wird (**Aufgabe**). Insbesondere ist $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ eine Basis von T_pM.

Bemerkung 3.5.6. Wie im randlosen Fall, können wir den Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit mit Rand als die Derivationen definieren, die durch Kurven induziert werden. Der einzige Unterschied zum randlosen Fall ist, dass wir nun auch C^1-Kurven wie γ_n in $(*)$, die auf halboffenen Intervallen definiert sind, betrachten müssen. Im glatten Fall, den wir jetzt behandeln, stimmt diese Definition mit unserer Definition überein. Im C^k-Fall für $k < \infty$ müssen wir sogar den Tangentialraum als Raum der durch Kurven induzierten Derivationen definieren, da der Raum der Derivationen von $GC^k_p(M)$ in diesem Fall zu groß ist.

Sei M weiterhin eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir erhalten, durch Einschränkung der Karten aus der differenzierbaren Struktur von M auf ∂M, wie im Beweis von Proposition 2.3.13, einen Atlas und damit eine differenzierbare Struktur auf ∂M. Ab jetzt versehen wir ∂M mit dieser differenzierbaren Struktur. Die Inklusionsabbildung $\iota \colon \partial M \to M$ ist dann tautologischerweise glatt.

Proposition 3.5.7. *Sei $p \in \partial M$. Die Abbildung*

$$(\iota_*)_p \colon T_p\partial M \to T_pM$$

ist injektiv.

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Dann ist $(U \cap \partial M, \varphi|_{U \cap \partial M})$ eine Karte für ∂M mit Koordinatenfunktionen $\{y^1 := x^1|_{U \cap \partial M}, \ldots, y^{n-1} := x^{n-1}|_{U \cap \partial M}\}$. Für $1 \leq i \leq n-1$ und hinreichend kleines ϵ betrachten wir die Kurven

$$\gamma_i \colon (-\epsilon, \epsilon) \to M \qquad t \mapsto \varphi^{-1}(x_0 + te_i),$$

die sowohl $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}|_p\}$ als auch $\{\frac{\partial}{\partial y^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}|_p\}$ definieren. Für $[f] \in GC_p^\infty(M)$ gilt

$$\left((\iota_*)_p(\frac{\partial}{\partial y^i}|_p)\right)([f]) = \frac{\partial}{\partial y^i}|_p([f \circ \iota]) = \frac{\mathrm{d}((f \circ \iota) \circ \gamma_i)}{\mathrm{d}t}|_{t=0} =$$

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma_i)}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p([f]).$$

Daraus folgt $(\iota_*)_p(\frac{\partial}{\partial y^i}|_p) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Eine Basis von $T_p\partial M$ wird also auf eine linear unabhängige Teilmenge von T_pM abgebildet. Die Behauptung folgt. $\square$

Mithilfe der Proposition 3.5.7 werden wir im Folgenden häufiger den Tangentialraum von ∂M an einem Punkt p mit einem Teilraum des Tangentialraums von M am Punkt p identifizieren.

Definition 3.5.8. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $p \in \partial M$. Ein Tangentialvektor $X \in T_pM \setminus T_p\partial M$ heißt ein *nach innen zeigender Tangentialvektor*, falls eine C^1-Kurve $\gamma\colon [0, \epsilon) \to M$ existiert, sodass $\gamma(0) = p$ und $\gamma((0, \epsilon)) \subset M^\circ$ gelten und X der Tangentialvektor

$$\dot\gamma(0)\colon GC_p^\infty(M) \to \mathbb{R} \qquad [f] \mapsto \lim_{t \to 0^+} \frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(0)}{t}$$

ist. $X \in T_pM \setminus T_p\partial M$ heißt ein *nach außen zeigender Tangentialvektor*, falls $-X$ ein nach innen zeigender Tangentialvektor ist.

Bemerkung 3.5.9. Der Tangentialraum an einem Punkt $p \in \partial M$ ist also eine disjunkte Vereinigung der Menge der nach innen zeigenden Tangentialvektoren an p, der Menge der nach außen zeigenden Tangentialvektoren an p und $T_p\partial M$.

Aufgabe 3.5.10. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $p \in \partial M$. Sei (U, φ) eine Karte für M um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Zeigen Sie, dass ein Tangentialvektor $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_pM$ genau dann ein nach innen (außen) zeigender Tangentialvektor ist, wenn $\xi^n > 0$ ($\xi^n < 0$). Weiterhin ist X genau dann in $T_p\partial M$, wenn $\xi^n = 0$.

(Ko-)Tangentialbündel und (Ko-)Vektorfelder

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir definieren wie im randlosen Fall

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM \quad T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$$

und die Projektionsabbildungen

$$\pi_{TM}\colon TM \to M \qquad T_pM \ni X \mapsto p$$

und

$$\pi_{T^*M}\colon T^*M \to M \qquad T_p^*M \ni \omega \mapsto p.$$

Die Konstruktion der Mannigfaltigkeitsstrukturen auf TM und T^*M sind fast identisch zum randlosen Fall. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Wie wir schon gesehen haben, können wir für jedes $p \in U$, mithilfe der Basis $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$, den Tangentialraum T_pM mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Explizit:

$$T_pM \to \mathbb{R}^n \qquad X \mapsto (\mathrm{d}x^1|_p(X), \ldots, \mathrm{d}x^n|_p(X)).$$

Die inverse Abbildung ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n \to T_pM \qquad (\xi^1, \ldots, \xi^n) \mapsto \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

Wir benutzen diesen Isomorphismus für jedes $p \in U$, um eine Bijektion zwischen $\pi_{TM}^{-1}(U)$ und $\mathbb{R}^n \times \varphi(U) \subset \mathbb{H}^{2n}$ zu konstruieren:

$$\widetilde{\varphi}\colon \pi_{TM}^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \varphi(U) \qquad T_pM \ni X \mapsto (\mathrm{d}x^1|_p(X), \ldots, \mathrm{d}x^n|_p(X), \varphi(p)).$$

Die Familie

$$\mathcal{B}_{TM} := \{\widetilde{\varphi}^{-1}(V) | (U, \varphi) \in \mathcal{F}, V \subset \mathbb{R}^n \times \varphi(U) \text{ ist offen}\}$$

ist eine Basis einer zweitabzählbaren Hausdorfftopologie. Die Familie

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = \{(\pi_{TM}^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) | (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$$

ist ein Atlas und induziert eine differenzierbare Struktur auf TM. Versehen mit dieser Topologie und differenzierbarer Struktur heißt TM das *Tangentialbündel* von M.

Für jede Karte (U, φ) mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ und jedes $p \in U$ erhalten wir einen Isomorphismus

$$T_p^*M \to \mathbb{R}^n \qquad \omega \mapsto (\omega(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p), \ldots, \omega(\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)),$$

den wir benutzen können, um die Bijektion

$$\widetilde{\varphi}\colon \pi_{T^*M}^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \varphi(U) \qquad T_p^*M \ni \omega \mapsto (\varphi(p), \omega(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p), \ldots, \omega(\frac{\partial}{\partial x^n}|_p))$$

zu definieren. Mithilfe solcher Bijektionen können wir wie oben eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf T^*M definieren. Versehen mit dieser differenzierbaren Struktur heißt T^*M das *Kotangentialbündel* von M.

Glatte Abbildungen $X\colon M \to TM$ bzw. $\omega\colon M \to T^*M$, mit der Eigenschaft $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_M$ bzw. $\pi_{T^*M} \circ \omega = \mathrm{id}_M$, heißen *Vektorfelder* bzw. 1-*Formen.* Der Raum aller Vektorfelder bzw. 1-Formen auf M wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bzw. $\Omega^1(M)$ bezeichnet und hat eine natürliche $C^\infty(M)$-Modul-Struktur. Weiterhin definieren wir den Kommutator zweier Vektorfelder auf M genau wie im randlosen Fall.

Kapitel 4

Immersionen und Untermannigfaltigkeiten

Das Differential einer differenzierbaren Abbildung kann als die beste lineare Approximation der Abbildung interpretiert werden. In diesem Kapitel werden wir uns u. a. mit der Frage beschäftigen, welche Informationen sich über eine Abbildung vom Differential ablesen lassen. Wir werden uns hauptsächlich für differenzierbare Abbildungen interessieren, deren Differential an allen Stellen injektiv ist. Das wird uns zum Konzept von Untermannigfaltigkeiten führen. Weiterhin werden wir versuchen, die folgende Frage zu beantworten: Wann besitzt eine Teilmenge einer Mannigfaltigkeit auf natürliche Weise eine differenzierbare Struktur? Mithilfe unserer Antwort erhalten wir sehr viele Beispiele neuer Mannigfaltigkeiten. Zum Beispiel werden wir sehen, dass viele Flächen in $\mathbb{R}^3$, denen Sie schon begegnet haben, auf natürliche Weise Mannigfaltigkeiten sind. Damit können wir die bisher entwickelte Theorie und die in den späteren Kapiteln folgenden Erkenntnisse auf diese Räume anwenden.

4.1 Die Injektivität und Surjektivität des Differentials

Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. In Proposition 3.2.17 haben wir gesehen, dass, falls das Differential von F in einem Punkt $p \in M$ ein Isomorphismus ist, dann ist die Einschränkung von F auf eine geeignete offene Umgebung von p ein Diffeomorphismus auf das Bild dieser Einschränkung. Wir betrachten nun eine Folgerung dieser Aussage.

Proposition 4.1.1. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in M$ so, dass $(F_*)_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ ein Isomorphismus ist. Sei (V, ψ) eine Karte um $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{y^1, \ldots, y^n\}$. Dann existiert eine Karte (U, φ) für M um p mit Koordinatenfunktionen*

$$\{x^1 \coloneqq y^1 \circ F, \ldots, x^n \coloneqq y^n \circ F\}.$$

Beweis.

- *Erster Beweis*: Das Kodifferential $F^*_{F(p)}$ von F an der Stelle $F(p)$ ist ein Isomorphismus, da $(F_*)_p$ ein Isomorphismus ist. Andererseits gilt für $1 \le i \le n$, dass

$$\mathrm{d}x^i(p) = \mathrm{d}y^i \circ F(p) = F^*_{F(p)}\left(\mathrm{d}y^i(F(p))\right).$$

Die Basis $\{\mathrm{d}y^1(F(p)),\dots,\mathrm{d}y^n(F(p))\}$ wird also unter dem Isomorphismus $F^*_{F(p)}$ auf $\{\mathrm{d}x^1(p),\dots,\mathrm{d}x^n(p)\}$ abgebildet. Damit ist $\{\mathrm{d}x^1(p),\dots,\mathrm{d}x^n(p)\}$ eine Basis von T^*_pM und die Funktionen $x^1,\dots,x^n$ sind, nach Proposition 3.2.21, die Koordinatenfunktionen einer Karte (U,φ) (mit $U\subset F^{-1}(V)$).

- *Zweiter Beweis*: Sei W eine offene Umgebung von p, sodass $F|_W\colon W\to F(W)$ ein Diffeomorphismus ist. Die Abbildung

$$\varphi := \psi\circ F\colon W\cap\psi(F^{-1}(V))\to F(W)\cap V\subset\mathbb{R}^n$$

ist eine Verkettung von Diffeomorphismen und damit ein Diffeomorphismus. Wir setzen $U:=W\cap\psi(F^{-1}(V)$. Das Tupel (U,φ) ist eine Karte (siehe Beispiel 2.4.17) mit Koordinatenfunktionen $\{x^1:=y^1\circ F,\dots,x^n:=y^n\circ F\}$.

□

Korollar 4.1.2. Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Sei $F\colon M\to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p\in M$ so, dass $(F_*)_p\colon T_pM\to T_{F(p)}N$ ein Isomorphismus ist. Dann existieren Karten (U,φ) und (V,ψ) um p und $F(p)$, sodass

$$F_{\varphi,\psi}:=\psi\circ F\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U\cap F^{-1}(V))\to\psi(V\cap F(U))$$

die Identitätsabbildung ist.

Beweis. Sei (V,ψ) eine Karte um $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{y^1,\dots,y^n\}$. Sei (U,φ) eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1:=y^1\circ F,\dots,x^n:=y^n\circ F\}$. Für $p\in U$ bildet die Abbildung $F_{\varphi,\psi}$ bildet den Punkt

$$\varphi(p)=(y^1\circ F(p),\dots,y^n\circ F(p))$$

auf

$$\psi(F(p))=(y^1\circ F(p),\dots,y^n\circ F(p)).$$

Die Behauptung folgt. □

Proposition 4.1.3. *Sei M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $F\colon M\to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p\in M$ so, dass $(F_*)_p\colon T_pM\to T_{F(p)}N$ surjektiv ist. Sei (V,ψ) eine Karte um $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{y^1,\dots,y^n\}$. Dann existieren glatte Funktionen $z^1,\dots,z^{m-n}$, die in einer offenen Umgebung von p definiert sind, sodass $y^1\circ F,\dots,y^n\circ F,z^1,\dots,z^{m-n}$ die Koordinatenfunktionen einer Karte (U,φ) um p sind.*

Lemma 4.1.4. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $p\in M$. Sei $\{y^1,\dots,y^k\}$ eine unabhängige Familie in p (insbesondere gilt $k\le n$). Dann existieren glatte Funktionen $z^1,\dots,z^{n-k}$, die in einer offenen Umgebung von p definiert sind, sodass $y^1,\dots,y^k,z^1,\dots,z^{n-k}$ die Koordinatenfunktionen einer Karte um p sind.*

Beweis. Die Familie $\{(\mathrm{d}y^1)_p,\dots,(\mathrm{d}y^k)_p\}\subset T^*_pM$ ist linear unabhängig. Sei (U,φ) eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1,\dots,x^n\}$. Die Familie

$$\{(\mathrm{d}y^1)_p,\dots,(\mathrm{d}y^k)_p,(\mathrm{d}x^1)_p,\dots,(\mathrm{d}x^n)_p\}$$

erzeugt T^*_pM. Wähle $x^{i_1}=:z^1,\dots,x^{i_{n-k}}=:z^{n-k}$, sodass

$$\{(\mathrm{d}y^1)_p,\dots,(\mathrm{d}y^k)_p,(\mathrm{d}z^1)_p,\dots,(\mathrm{d}z^{n-k})_p\}$$

eine Basis von T^*_pM ist. Nach Proposition 3.2.21, existiert eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{y^1,\dots,y^k,z^1,\dots,z^{n-k}\}$. □

Beweis von Proposition 4.1.3. Es genügt zu zeigen, dass $y^1 \circ F, \ldots, y^n \circ F$ eine unabhängige Familie in p ist. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 4.1.4. Wir setzen

$$x^1 \coloneqq y^1 \circ F, \ldots, x^n \coloneqq y^n \circ F.$$

Da $(F_*)_p$ surjektiv ist, ist die duale Abbildung $(F^*)_{F(p)}$ injektiv. Andererseits berechnen wir wie im Beweis von Proposition 4.1.1

$$\mathrm{d}x^i(p) = \mathrm{d}y^i \circ F(p) = F^*_{F(p)}\left(\mathrm{d}y^i(F(p))\right).$$

Die Basis $\{\mathrm{d}y^1(F(p)), \ldots, \mathrm{d}y^n(F(p))\}$ wird also unter der injektiven Abbildung $F^*_{F(p)}$ auf $\{\mathrm{d}x^1(p), \ldots, \mathrm{d}x^n(p)\}$ abgebildet. Das zeigt, dass die Familie $\{x^1, \ldots, x^n\}$ in p unabhängig ist und wir Funktionen $z^1, \ldots, z^{m-n}$ finden können, sodass $x^1, \ldots, x^n, z^1, \ldots, z^{m-n}$ die Koordinatenfunktionen einer Karte (U, φ) um p sind (mit $U \subset F^{-1}(V)$). □

Korollar 4.1.5. Sei M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in M$ so, dass $(F_*)_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektiv ist. Dann existieren Karten (U, φ) und (V, ψ) um p und $F(p)$, sodass

$$F_{\varphi,\psi} \coloneqq \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V \cap F(U))$$

durch

$$(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$$

gegeben ist.

Beweis. Sei (V, ψ) eine Karte um $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{y^1, \ldots, y^n\}$. Sei (U, φ) eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1 \coloneqq y^1 \circ F, \ldots, x^n \coloneqq y^n \circ F, z^1, \ldots, z^{m-n}\}$. Für $p \in U$ gilt

$$\varphi(p) = (y^1 \circ F(p), \ldots, y^n \circ F(p), z^1(p), \ldots z^{m-n}(p)).$$

Weiterhin gilt

$$\psi(F(p)) = (y^1 \circ F(p), \ldots, y^n \circ F(p)).$$

Die Behauptung folgt. □

Proposition 4.1.6. *Sei M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in M$ so, dass $(F_*)_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ injektiv ist. Sei (V, ψ) eine Karte um $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{y^1, \ldots, y^n\}$. Dann existieren $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$, sodass*

$$y^{i_1} \circ F, \ldots, y^{i_m} \circ F$$

die Koordinatenfunktionen einer Karte (U, φ) um p sind.

Beweis. Da $(F_*)_p$ injektiv ist, ist die duale Abbildung $(F^*)_{F(p)}$ surjektiv. Andererseits gilt

$$\mathrm{d}y^i \circ F(p) = F^*_{F(p)}\left(\mathrm{d}y^i(F(p))\right).$$

Daraus folgt, dass die Familie

$$\{\mathrm{d}y^1 \circ F(p), \ldots, \mathrm{d}y^n \circ F(p)\}$$

den Raum T_p^*M erzeugt. Daher gibt es $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$, sodass

$$\{\mathrm{d}y^{i_1} \circ F(p), \dots, \mathrm{d}y^{i_m} \circ F(p)\}$$

eine Basis von T_p^*M ist. Die Familie

$$\{y^{i_1} \circ F(p), \dots, y^{i_m} \circ F(p)\}$$

ist damit unabhängig in p. Daraus folgt die Existenz einer Karte (U, φ) um p mit Koordinatenfunktionen $\{y^{i_1} \circ F(p), \dots, y^{i_m} \circ F(p)\}$ (mit $U \subset F^{-1}(V)$). □

Bemerkung 4.1.7. Die folgende Umformulierung der Aussage von Proposition 4.1.6 wird später nützlich: Seien M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in M$ so, dass $(F_*)_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ injektiv ist. Sei (V, ψ) eine Karte um $F(p)$. Dann existiert eine Projektionsabbildung $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die durch das Ignorieren mancher Komponenten entsteht, sodass $\pi \circ \psi \circ F$ eine Koordinatenabbildung auf einer offenen Umgebung von p ist.

Das analoge Korollar zu Korollar 4.1.2 und Korollar 4.1.5, das sich aus Proposition 4.1.6 herleiten lässt, ist nicht sehr hilfreich. Eine präzisere Aussage zur Koordinatendarstellungen von Abbildungen, deren Differential an einem Punkt injektiv ist, werden wir später diskutieren. Proposition 4.1.6 hat jedoch die folgende interessante Folgerung:

Korollar 4.1.8. Seien M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in M$ so, dass $(F_*)_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ injektiv ist. Dann existiert eine offene Umgebung U von p, sodass $F|_U\colon U \to N$ injektiv ist.

Beweis. Seien (U, φ) und (V, ψ) wie in Proposition 4.1.6. Seien $q_1, q_2 \in U$ so, dass $F(q_1) = F(q_2)$. Es gilt $\psi(F(q_1)) = \psi(F(q_2))$ und damit

$$(y^1 \circ F(q_1), \dots, y^n \circ F(q_1)) = (y^1 \circ F(q_2), \dots, y^n \circ F(q_2)).$$

Daraus folgt, dass

$$\varphi(q_1) = (y^{i_1} \circ F(q_1), \dots, y^{i_m} \circ F(q_1)) = (y^{i_1} \circ F(q_2), \dots, y^{i_m} \circ F(q_2)) = \varphi(q_2).$$

Da φ bijektiv ist, folgt $q_1 = q_2$. □

4.2 Submersionen, Immersionen und Einbettungen

Definition 4.2.1. Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $F\colon M \to N$ heißt eine Submersion, falls $(F_*)_p$ für alle $p \in M$ surjektiv ist.

Beispiel 4.2.2. Sei M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Projektionsabbildungen $\pi_M\colon : M \times N \to M$ und $\pi_N\colon M \times N \to N$ sind Submersionen: In der Tat: Sei $(p, q) \in M \times N$ und seien (U, φ) und (V, ψ) Karten um p bzw. q. Die Abbildung $\varphi \circ \pi_M \circ (\varphi \times \psi)$ ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}^m.$$

Die darstellende Matrix von $((\pi_M)_*)_{(p,q)}$ bezüglich der Karten (U, φ) und $(U \times V, \varphi \times \psi)$ ist also die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_m & 0_{m\times n} \end{pmatrix},$$

wobei id_m und $0_{m\times n}$ die $m \times m$-Identitätsmatrix bzw. die $m \times n$-Nullmatrix bezeichnen. Das zeigt, dass $((\pi_M)_*)_{(p,q)}$ surjektiv ist.

Wir werden Submersionen in dieser Veranstaltung nicht systematisch untersuchen.

Definition 4.2.3. Seien M und N Mannigfaltigkeiten oder Mannigfaltigkeiten mit Rand. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung

- F heißt eine *Immersion*, falls $(F_*)_p$ für alle $p \in M$ injektiv ist.
- F heißt eine *Einbettung*, falls F gleichzeitig eine injektive Immersion und eine topologische Einbettung ist.

Bemerkung 4.2.4. Zur Erinnerung (siehe Definition 1.1.21): Eine stetige injektive Abbildung $F\colon Y \to X$ zwischen topologischen Räumen Y und X ist eine topologische Einbettung, falls die Abbildung

$$Y \to F(Y) \qquad y \mapsto F(y)$$

ein Homöomorphismus ist, wobei $F(Y)$ mit der Teilraumtopologie versehen wird.

Aufgabe 4.2.5. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in M$ so, dass $(F_*)_p$ injektiv bzw. surjektiv ist. Dann existiert eine offene Umgebung U von p, sodass $F|_U$ eine Immersion bzw. Submersion ist.

Beispiel 4.2.6. Die glatte Abbildung

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto (\cos x, \sin x)$$

ist eine Immersion: Die darstellende Matrix von $(F_*)_x$ bezüglich der durch Standardkoordinaten induzierten Basen für $T_x\mathbb{R}$ und $T_{F(x)}\mathbb{R}^2$ ist die Matrix $\begin{pmatrix}-\sin x & \cos x\end{pmatrix}^t$, die an keiner Stelle verschwindet. Dieses Beispiel zeigt, dass obwohl Immersionen nach Korollar 4.1.8 „lokal injektiv“ sind, sie i. Allg. nicht (global) injektiv sind.

Beispiel 4.2.7. Die glatte Abbildung

$$G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto (x, 0)$$

ist eine Einbettung. Die darstellende Matrix von $(G_*)_x$ in Standardkoordinaten ist die Matrix $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^t$ und G ist eine topologische Einbettung (siehe Beispiel 1.1.17).

Beispiel 4.2.8. Sei M eine Mannigfaltigkeit oder eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $U \subset M$ offen. Die Inklusionsabbildung $\iota\colon U \to M$ ist eine Einbettung: $(\iota_*)_p$ ist an jeder Stelle ein Isomorphismus (insbesondere injektiv) und die Topologie auf U ist die Teilraumtopologie.

Beispiel 4.2.9. Die Inklusionsabbildung $\iota\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Einbettung: ι ist eine topologische Einbettung, da S^n mit der Teilraumtopologie versehen ist. Weiterhin kann man z. B. mittels Karten von S^n und der Identitätskarte auf $\mathbb{R}^{n+1}$ die Injektivität von $(\iota_*)_p$ für alle $p \in S^n$ überprüfen. Wir geben einen anderen Beweis für die Aussage, dass ι eine Immersion ist: Seien $I\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ und $\iota'\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ Inklusionsabbildungen. ι ist die Verkettung

$$S^n \xrightarrow{\iota'} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{I} \mathbb{R}^{n+1}.$$

Damit ist für jedes $p \in S^n$ das Differential $(\iota_*)_p$ die Verkettung

$$T_pS^n \xrightarrow{(\iota'_*)_p} T_p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \xrightarrow{(I_*)_p} T_p\mathbb{R}^{n+1}.$$

Da $(I_*)_p$ ein Isomorphismus ist, ist die Injektivität von $(\iota_*)_p$ äquivalent zur Injektivität von $(\iota\prime_*)$. Wir zeigen nun, dass (ι'_*) für jedes $p \in S^n$ injektiv ist. Betrachte die glatte Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n \qquad x \mapsto \frac{x}{||x||}.$$

Es gilt $F \circ \iota' = \mathrm{id}_{S^n}$. Daraus folgt, $(F_*)_p \circ (\iota'_*)_p = \mathrm{id}_{T_pS^n}$. Die Abbildung $(\iota'_*)_p$ hat also eine Linksinverse und ist damit injektiv.

Beispiel 4.2.10. Die Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \mapsto ((2 + \cos(x))\cos(y), (2 + \cos(x))\sin(y), \sin(2y))$$

ist eine injektive Immersion. Betrachte die Abbildung

$$\pi\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1 \qquad (x, y) \mapsto ((\cos x, \sin x), (\cos y, \sin y)).$$

Dann existiert genau eine Abbildung $\widetilde{F}\colon S^1 \times S^1$ mit $F = \widetilde{F} \circ \pi$. Man kann zeigen, dass $\widetilde{F}$ eine Einbettung ist (**Aufgabe**).

Beispiel 4.2.11. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir haben gesehen, dass ∂M auf natürliche Weise eine Mannigfaltigkeit ist. Die Inklusionsabbildung $\iota\colon \partial M \to M$ ist eine Einbettung: In Proposition 3.5.7 haben wir schon gesehen, dass sie eine Immersion ist. Da ∂M mit der Teilraumtopologie versehen wird, ist ι tautologischerweise eine topologische Einbettung.

Nicht jede injektive Immersion ist eine Einbettung:

Beispiel 4.2.12. Die glatte Abbildung

$$H\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto (\sin(x), \sin(2x))$$

ist eine injektive Immersion: In Standardkoordinaten ist $\begin{pmatrix}\cos x & 2\cos 2x\end{pmatrix}^t$ die darstellende Matrix von $(H_*)_x$ und die Gleichungen $\cos x = 0$ und $\cos 2x = 0$ können nicht gleichzeitig gelten. H ist jedoch keine topologische Einbettung (siehe Aufgabe 1.1.23). Ganz analog zeigt man, dass

$$F\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto (\sin(-x), \sin(2x))$$

eine injektive Immersion, aber keine Einbettung ist.

Die folgende Proposition gibt einfache Kriterien, um zu überprüfen, ob eine injektive Immersion eine Einbettung ist.

Proposition 4.2.13. *Seien X und Y lokal kompakte Hausdorffräume. Sei $F\colon X \to Y$ eine stetige injektive Abbildung. Die Abbildung F ist eine topologische Einbettung, falls sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *F ist offen.*
2. *F ist abgeschlossen.*
3. *X ist kompakt.*
4. *F ist eine* eigentliche *Abbildung; d. h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt.*

Beweis. **Aufgabe**. □

Beispiel 4.2.14. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $1 \leq k \leq n$. Sei (U, φ) eine Karte auf M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Seien $c^{k+1}, \ldots, c^n \in \mathbb{R}$. Die Teilmenge

$$S := \{p \in U | x^{k+1}(p) = c^{k+1}, \ldots, x^n(p) = c^n\}$$

heißt ein k-*Slice* oder k-*Schnitt* der Karte (U, φ). Wir versehen S mit der Teilraumtopologie und die differenzierbarer Struktur, die durch die globale Karte mit den Koordinatenfunktionen $x^1, \ldots, x^k$ induziert wird. Die Menge S wird so zu einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit und die Inklusionsabbildung von S in M wird zu einer Einbettung.

Die folgende Proposition ist u. a. bei der Überprüfung der Glattheit von Abbildungen sehr hilfreich.

Proposition 4.2.15. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $\iota\colon M \to N$ eine injektive Immersion. Sei L eine weitere Mannigfaltigkeit und $F\colon L \to M$ eine Abbildung. Wir setzen $\widetilde{F} := \iota \circ F$.*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[dr, "F"'] & N \\ & M \arrow[u, "\iota"] \end{tikzcd}$$

1. *F ist genau dann glatt, wenn F stetig und $\widetilde{F}$ glatt ist.*

2. *F ist stetig, falls $\widetilde{F}$ stetig und ι eine Einbettung ist.*

Beweis.

1. Wir setzen $m := \dim M$ und $n := \dim N$. Sei F glatt. Dann ist F insbesondere stetig und $\widetilde{F}$ als eine Verkettung von glatten Funktionen glatt. Sei nun umgekehrt F stetig und $\widetilde{F}$ glatt. Wir zeigen, dass für jedes $p \in L$ eine offene Umgebung U von p existiert, sodass $F|_U$ glatt ist. Dafür zeigen wir, dass für jedes $p \in L$ eine Karte (V, φ) um $F(p)$ existiert, sodass $\varphi \circ F\colon F^{-1}(V) \to \varphi(V)$ glatt ist. Da φ eine Karte und damit ein Diffeomorphismus ist, folgt daraus, dass $F|_{F^{-1}(V)}$ glatt ist. Wir bemerken, dass wir hier die Stetigkeit von F benötigen, um die Offenheit von $F^{-1}(V)$ zu gewährleisten. Sei (W, ψ) eine Karte um $\iota(F(p))$. Dann existiert nach Bemerkung 4.1.7 eine Projektionsabbildung $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sodass $\varphi := \pi \circ \psi \circ \iota$, eingeschränkt auf eine offene Umgebung V von $F(p)$, eine Koordinatenabbildung ist; d. h. (V, φ) ist eine Karte um $F(p)$. Es gilt

   $$(\varphi \circ F)|_{F^{-1}(V)} = (\pi \circ \psi \circ \iota \circ F)|_{F^{-1}(V)} = (\pi \circ \psi \circ \widetilde{F})|_{F^{-1}(V)}.$$

   Aus der Glattheit von $\widetilde{F}$ folgt die Glattheit von $(\varphi \circ F)|_{F^{-1}(V)}$. Die Behauptung folgt.

2. Der Beweis ist ähnlich zum Beweis von Teil 3 von Proposition 1.1.20. □

Im folgenden Beispiel betrachten wir eine Anwendung von Proposition 4.2.15.

Beispiel 4.2.16. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $F\colon M \to S^n$ eine Abbildung. Sei $\iota\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die Inklusionsabbildung. Wir haben gesehen, dass ι eine Einbettung ist. Um direkt zu überprüfen, ob F eine glatte Abbildung ist, müssen wir zuerst einen Atlas für M und für S^n konstruieren und die Darstellung von F in Karten für M und S^n, die in den Atlanten enthalten sind, betrachten. Die Proposition 4.2.15 gibt uns die folgende Alternative: Um die Glattheit von F zu überprüfen, reicht es die Glattheit von $\iota \circ F\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ zu überprüfen. Das ist i. Allg. einfacher, da man mit der Identitätskarte auf $\mathbb{R}^{n+1}$ arbeiten kann.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota\circ F"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{R}^{n+1} \\ & S^n \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Zunächst untersuchen wir das lokale Verhalten von Immersionen. Die folgende Proposition besagt, dass Immersionen lokal Einbettungen sind.

Proposition 4.2.17. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Sei $F\colon M \to N$ eine Immersion. Für jedes $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U von p, sodass $F|_U\colon U \to N$ eine Einbettung ist.*

Beweis. Da $(F_*)_p$ injektiv ist, existiert laut Korollar 4.1.8 eine offene Umgebung V von p, sodass $F|_V$ injektiv ist. Sei U eine offene Umgebung mit $\overline{U} \subset V$ und $\overline{U}$ kompakt. Nach Proposition 4.2.13 ist $F|_{\overline{U}}$ eine topologische Einbettung. Jede Einschränkung einer topologischen Einbettung ist wieder eine topologische Einbettung. Damit ist die Abbildung $F|_U$ eine topologische Einbettung. Da sie zusätzlich eine injektive Immersion ist, ist sie eine Einbettung. □

Die folgende Proposition gibt uns eine Beschreibung des Bilds einer Einschränkung einer Immersion auf geeignete offene Teilmengen. Mit deren Hilfe können wir analog zu Korollar 4.1.2 und Korollar 4.1.5 Karten konstruieren, bezüglich der Immersionen eine einfache Gestalt haben.

Proposition 4.2.18. *Sei M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $F\colon M \to N$ eine Immersion. Sei $p \in M$. Dann existiert eine offene Umgebung U von p und eine kubische, um $F(p)$ zentrierte Karte (V, ψ), sodass $F|_U$ injektiv ist und $F(U)$ ein m-Slice der Karte (V, ψ) ist.*

Beweis. Sei (W, τ) eine zentrierte Karte um $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{z^1, \dots, z^n\}$. Nach Proposition 4.1.6 sind m Elemente von $\{z^1 \circ F, \dots, z^n \circ F\}$ die Koordinatenfunktionen einer um p zentrierten Karte $(\widetilde{W}, \widetilde{\tau})$. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass $\{z^1 \circ F, \dots, z^m \circ F\}$ die Koordinatenfunktionen von $(\widetilde{W}, \widetilde{\tau})$ sind (sonst können wir die Funktionen $\{z^1, \dots, z^n\}$ umnummerieren). Sei $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Projektion auf die ersten n Komponenten. Dann gilt $\widetilde{\tau} = \pi \circ \tau \circ F$. Für $1 \leq i \leq n$ definieren wir Funktionen y^i auf $(\pi \circ \tau)^{-1}(\widetilde{\tau}(\widetilde{W}))$ durch

$$y^i = \begin{cases} z^i & \text{falls } 1 \leq i \leq m \\ z^i - z^i \circ F \circ \widetilde{\tau}^{-1} \circ \pi \circ \tau & \text{falls } m+1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

Wir bemerken, dass für $q \in \widetilde{W}$ und $m + 1 \leq i \leq n$

$$y^i(F(q)) = z^i(F(q)) - z^i \circ F \circ \widetilde{\tau}^{-1} \circ \pi \circ \tau(F(q)) =$$

$$z^i(F(q)) - z^i \circ F \circ \widetilde{\tau}^{-1} \circ \pi \circ \tau \circ F(q) = z^i(F(q)) - z^i(F(q)) = 0.$$

Für $m + 1 \leq i \leq n$ verschwindet also y^i auf $F(\widetilde{W})$. Wir behaupten, dass die Familie $\{y^1, \dots, y^n\}$ die Koordinatenfunktionen einer Karte um $F(p)$ sind. Um diese Behauptung zu beweisen, zeigen wir, dass $\{y^1, \dots, y^n\}$ eine in $F(p)$ unabhängige Familie ist. Für $1 \leq$

$i \leq m$ gilt $\mathrm{d}y^i(F(p)) = \mathrm{d}z^i(F(p))$. Für $m+1 \leq i \leq n$ bezeichnen wir die Funktion $z^i \circ F \circ \widetilde{\tau}^{-1} \circ \pi \circ \tau$ mit w^i. Für geeignete Zahlen ξ_{ij} ist

$$\mathrm{d}w^i(F(p)) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \mathrm{d}z^j|_{F(p)}$$

und damit gilt für $m+1 \leq i \leq n$, dass

$$\mathrm{d}y^i(F(p)) = \mathrm{d}z^i|_{F(p)} - \mathrm{d}w^i(F(p)) = \mathrm{d}z^i|_{F(p)} - \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \mathrm{d}z^j|_{F(p)}.$$

Für $m+1 \leq j \leq n$ gilt

$$\xi_{ij} = \mathrm{d}w^i(\frac{\partial}{\partial z^j}|_{F(p)}) = \frac{\partial}{\partial z^j}|_{F(p)}(w^i) = 0$$

(**warum?**). Damit gilt für $m+1 \leq j \leq n$

$$\mathrm{d}y^i(F(p)) = \mathrm{d}z^i|_{F(p)} - \sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} \mathrm{d}z^j|_{F(p)}.$$

Daraus folgt, dass die Familie $\{y^1, \ldots, y^n\}$ in $F(p)$ unabhängig ist. Also existiert eine kubische, um $F(p)$ zentrierte Karte (V, ψ) mit $V \subset (\pi \circ \tau)^{-1}(\widetilde{\tau}(\widetilde{W}))$ und mit Koordinatenfunktionen $\{y^1, \ldots, y^n\}$. Wir setzen $U \coloneqq \widetilde{W} \cap F^{-1}(V)$. Die Menge $F(U)$ ist dann der k-Slice von (V, ψ) gegeben durch

$$\{q \in V | y^i(q) = 0 \text{ für } m+1 \leq i \leq n\}.$$

Die darstellende Abbildung von F bezüglich der Karten $(U, \widetilde{\tau}|_U)$ und (V, ψ) ist gegeben durch

$$(\xi^1, \ldots, \xi^m) \mapsto (\xi^1, \ldots, \xi^m, 0, \ldots, 0).$$

Dies impliziert, dass $F|_U$ injektiv ist. □

Aus dem Beweis von Proposition 4.2.18 erhalten wir das folgende

Korollar 4.2.19. Sei M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $F\colon M \to N$ eine Immersion. Sei $p \in M$. Dann existieren Karten (U, φ) um p und (V, ψ) um $F(p)$, sodass $F(U) \subset V$ und

$$F_{\varphi,\psi}\colon \varphi(U) \to \psi(V)$$

durch

$$(\xi^1, \ldots, \xi^m) \mapsto (\xi^1, \ldots, \xi^m, 0, \ldots, 0)$$

gegeben ist.

Die folgende globale Aussage über Immersionen ist interessant und hilfreich.

Proposition 4.2.20. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Eine glatte bijektive Immersion $F\colon M \to N$ ist automatisch ein Diffeomorphismus.*

Ein Beweis von Proposition 4.2.20 ist in der folgenden Aufgabe enthalten.

Aufgabe 4.2.21.

(i) Sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Zeigen Sie, dass F Nullmengen auf Nullmengen abbildet und folgern Sie daraus, dass, für $m < n$, das Bild jeder C^1-Abbildung $G\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge ist.

(Hinweis: Erinnern Sie sich, dass F eingeschränkt auf kompakte Teilmengen eine Lipschitz-Funktion ist und dass eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine Nullmenge ist, wenn für jedes $\epsilon > 0$ abzählbar viele Bälle $\{B_{r_i}(p_i)\}$ existieren, sodass $N \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_{r_i}(p_i)$ und $\sum_i \lambda(B_{r_i}(p_i)) < \epsilon$.).

(ii) Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $n > m$. Sei $F\colon M \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Zeigen Sie, dass das Bild von F eine Nullmenge ist.

(Hinweis: M ist zweitabzählbar).

(iii) Seien M und N Mannigfaltigkeiten. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte bijektive Immersion. Zeigen Sie, dass F ein Diffeomorphismus ist.
(Hinweis: Sie können Teil (i) und (ii) benutzen. Wir setzen $n \coloneqq \dim N$. Konstruieren Sie mithilfe von F eine glatte surjektive Abbildung zwischen einer offenen Teilmenge von M und $\mathbb{R}^n$.)

4.3 Untermannigfaltigkeiten

Wir untersuchen nun Teilmengen von Mannigfaltigkeiten, die selbst eine (nicht zu seltsame) Mannigfaltigkeitsstruktur besitzen.

Definition 4.3.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit oder eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $S \subset M$ und $\iota\colon S \to M$ die Inklusionsabbildung.

- S versehen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur, sodass ι eine Immersion ist, heißt eine *Untermannigfaltigkeit* von M.
- S versehen mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur, sodass ι eine Einbettung ist, heißt eine *eingebettete Untermannigfaltigkeit* von M.

Falls S eine Untermannigfaltigkeit oder eingebettete Untermannigfaltigkeit von M ist, heißt $\dim M - \dim S$ die *Kodimension* von S in M.

Bemerkung 4.3.2. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $S \subset M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Dann ist die Topologie auf S notwendigerweise die Teilraumtopologie.

Beispiel 4.3.3. Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine injektive Immersion. Dann ist F eine Bijektion zwischen M und $F(M)$ und wir können die Topologie und differenzierbare Struktur von M auf $F(M)$ transportieren. Die Abbildung $F\colon M \to F(M)$ wird dann tautologischerweise zu einem Diffeomorphismus. Die Inklusionsabbildung $\iota\colon F(M) \to N$ ist in diesem Fall eine Immersion. Damit ist $F(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von N. Falls F eine Einbettung ist, wird $F(M)$ auf diese Weise zu einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit. Wir fassen zusammen: Das Bild einer injektiven Immersion bzw. Einbettung ist auf natürliche Weise eine Untermannigfaltigkeit bzw. eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Mithilfe der obigen Beispiele von injektiven Immersionen und Einbettungen erhalten wir Beispiele von Untermannigfaltigkeiten und eingebettete Untermannigfaltigkeiten.

Beispiel 4.3.4. Der Rand einer Mannigfaltigkeit mit Rand M, versehen mit seiner kanonischen Mannigfaltigkeitsstruktur, ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M.

Aufgabe 4.3.5. Sei M eine Mannigfaltigkeit.

(i) Zeigen Sie, dass die eingebetteten Untermannigfaltigkeiten von M mit Kodimension 0 genau die offenen Teilmengen von M, versehen mit ihrer kanonischen Mannigfaltigkeitsstruktur, sind.

(ii) Zeigen Sie, dass Untermannigfaltigkeiten von M mit Kodimension 0 eingebettete Untermannigfaltigkeiten sind.

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $S \subset M$. Die folgenden Fragen sind natürlich:

- Kann die Menge S mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen werden, sodass sie eine Untermannigfaltigkeit von M ist? Falls ja, wie viele solcher Mannigfaltigkeitsstrukturen gibt es?

- Sei S mit der Teilraumtopologie versehen. Kann der topologische Raum S mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden, sodass er eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M ist? Falls ja, wie viele solcher differenzierbaren Strukturen gibt es?

Wir diskutieren zuerst den Eindeutigkeitsaspekt der obigen Problematik.

Proposition 4.3.6. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei S eine Teilmenge von M. Wir versehen S mit einer Topologie. Dann existiert höchstens eine differenzierbare Struktur auf S, sodass S versehen mit dieser differenzierbaren Struktur eine Untermannigfaltigkeit von M ist.*

Beweis. Seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ differenzierbare Strukturen auf S, sodass $(S, \mathcal{F}_1)$ und $(S, \mathcal{F}_2)$ Untermannigfaltigkeiten von M sind. Wir bezeichnen die Mannigfaltigkeiten $(S, \mathcal{F}_1)$ und $(S, \mathcal{F}_2)$ einfachheitshalber mit S_1 bzw. S_2. Wir zeigen, dass die Identitätsabbildung $\mathrm{id}\colon S_1 \to S_2$ ein Diffeomorphismus ist. Seien $\iota_1\colon S_1 \to M$ und $\iota_2\colon S_2 \to M$ die Inklusionsabbildungen (sie stimmen überein). Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & M \\ & S_2 \arrow[u, "\iota_2"'] \end{tikzcd}.$$

Da die Topologien auf S_1 und S_2 übereinstimmen, ist die Abbildung id ein Homöomorphismus und insbesondere stetig. Da $\iota_2\colon S_2 \to M$ eine injektive Immersion ist, ist $\mathrm{id}\colon S_1 \to S_2$ nach Proposition 4.2.15 glatt. Analog zeigt man, dass die Identitätsabbildung $\mathrm{id}\colon S_2 \to S_1$ glatt ist. Die Behauptung folgt. □

Proposition 4.3.7. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei S eine Teilmenge von M. Wir versehen S mit der Teilraumtopologie. Falls eine differenzierbare Struktur auf S existiert, sodass $(S, \mathcal{F})$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist, dann ist S versehen mit einer beliebigen anderen Mannigfaltigkeitsstruktur keine Untermannigfaltigkeit von M.*

Bemerkung 4.3.8. $(S, \mathcal{F})$ wie in Proposition 4.3.7 ist eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M, da S mit der Teilraumtopologie versehen ist.

Beweis von Proposition 4.3.7. Wir versehen S mit einer beliebigen Mannigfaltigkeitsstruktur und bezeichnen die resultierende Mannigfaltigkeit mit $\widetilde{S}$. Die Mannigfaltigkeit $(S, \mathcal{F})$ wie in der Voraussetzung bezeichnen wir mit S. Die Inklusionsabbildungen von S und $\widetilde{S}$ in M werden im Folgenden mit ι und $\widetilde{\iota}$ bezeichnet. Sei $\mathrm{id}\colon \widetilde{S} \to S$ die Identitätsabbildung. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \widetilde{S} \arrow[r, "\widetilde{\iota}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & M \\ & S \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} .$$

Wir nehmen jetzt an, dass $\widetilde{S}$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist. Da ι eine Einbettung ist, ist $\mathrm{id}\colon \widetilde{S} \to S$ nach Proposition 4.2.15 stetig. Dann ist $\widetilde{\iota}$ glatt und Proposition 4.2.15 impliziert die Glattheit von id. Da $\widetilde{\iota}$ in diesem Fall eine Immersion ist und $\widetilde{\iota}_* = \iota_* \circ \mathrm{id}_*$ gilt, ist id auch eine Immersion. Also ist die Identitätsabbildung $\mathrm{id}\colon \widetilde{S} \to S$ eine bijektive Immersion. Proposition 4.2.20 impliziert dann, dass id ein Diffeomorphismus ist. Mit anderen Worten stimmen die Mannigfaltigkeitsstrukturen von S und $\widetilde{S}$ überein. Die Behauptung folgt. □

Beispiel 4.3.9. Wir haben schon gesehen, dass die glatte Abbildung

$$H\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto (\sin(x), \sin(2x))$$

eine injektive Immersion ist. $S := H((-\pi, \pi))$ kann also mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen werden, die sie zu einer 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ macht. Man kann zeigen, dass S nicht zu einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ gemacht werden kann. Andererseits kann man zeigen, dass mehrere Mannigfaltigkeitsstrukturen auf S existieren, die S zu einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ machen (**Aufgabe**).

Wir fokussieren uns nun auf die Frage der Existenz einer Mannigfaltigkeitsstruktur auf einer Teilmenge S einer Mannigfaltigkeit M, die S zu einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit von M macht.

Proposition 4.3.10. *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei S eine Teilmenge von M. Falls S eine k-dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit von M ist, existiert für jeden Punkt $p \in S$ eine Karte (U, φ) um p, sodass $S \cap U$ ein k-Slice der Karte (U, φ) ist. Umgekehrt: Falls für jeden Punkt $p \in S$ eine Karte (U, φ) um p existiert, sodass $S \cap U$ ein k-Slice der Karte (U, φ) ist, kann die Menge S mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen werden, die sie zu einer k-dimensionalen eingebetteten Untermannigfaltigkeit macht.*

Beweis. Sei S eine k-dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit. Sei $\iota\colon S \to M$ die Inklusionsabbildung. Sei $p \in S$. Nach Proposition 4.2.18 existiert eine offene Umgebung W von p in S und eine Karte (V, ψ) um $\iota(p) = p$, sodass $W = \iota(W)$ ein k-Slice der Karte (V, ψ) ist. Da S mit der Teilraumtopologie versehen ist und W eine offene Teilmenge von S ist, existiert eine offene Teilmenge $\widetilde{V}$ von M, sodass $W = \widetilde{V} \cap S$. Wir setzen $U := \widetilde{V} \cap V$. Dann ist U eine offene Umgebung von p in M und $W = U \cap S$ ein k-Slice der Karte $(U, \varphi := \psi|_U)$.

Sei nun umgekehrt S so, dass für jedes $p \in S$ eine Karte (U, φ) um p existiert, sodass $S \cap U$ ein k-Slice der Karte (U, φ) ist. O. B d. A. können wir annehmen, dass der k-Slice durch das Fixieren der letzten $(n-k)$ Koordinaten in der Karte (U,φ) entsteht. Wir versehen S mit der Teilraumtopologie. Somit ist S ein Hausdorffraum und zweitabzählbar. Mit p und (U,φ) wie eben und der Projektionsabbildung $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ auf die ersten k Komponenten, definieren wir eine Karte $(\widetilde{U} := U \cap S, \widetilde{\varphi} := \pi \circ \varphi)$ für S um p. **Warum ist die Abbildung $\widetilde{\varphi}$ ein Homöomorphismus auf ihr Bild?**. Da wir rund um jedes $p \in S$ so eine Karte konstruieren können, sehen wir, dass S eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Wir behaupten, dass die Familie der Karten auf S, die so konstruiert werden, ein Atlas für S ist und dass S versehen mit der induzierten differenzierbaren Struktur eine k-dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit von M ist. Der Beweis dieser Behauptung ist eine **Aufgabe**. $\square$

Aufgabe 4.3.11. Zeigen Sie, dass die im Beweis der Proposition 4.3.10 definierte Abbildung ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist und beweisen Sie die dort formulierte Behauptung.

Mithilfe der Proposition 4.3.10 erhalten wir eine sehr nützliche Methode um eingebettete Mannigfaltigkeiten zu erkennen und neue eingebettete Untermannigfaltigkeiten zu konstruieren.

Proposition 4.3.12 (Satz vom regulären Wert)**.** *Sei M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $q \in N$ und $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, sodass $(F_*)_p$ für alle $p \in F^{-1}(q) =: S$ surjektiv ist. Dann existiert eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur auf S, mit der S eine $(m-n)$-dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit von M ist.*

Bemerkung 4.3.13. In der Situation von Proposition 4.3.12 heißt jeder Punkt $q \in N$ mit der Eigenschaft, dass $(F_*)_p$ für alle $p \in F^{-1}(q)$ surjektiv ist, ein *regulärer Wert* von F. Das Urbild eines regulären Werts von F heißt eine *reguläre Niveaumenge von F*. Mit anderen Worten besagt Proposition 4.3.12, dass reguläre Niveaumengen einer Abbildung auf eindeutige Weise mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen werden können, die sie zu eingebetteten Untermannigfaltigkeiten des Definitionsbereichs machen.

Beweis. Um die Existenz einer Mannigfaltigkeitsstruktur auf S wie in der Behauptung zu beweisen, reicht es nach Proposition 4.3.10 zu zeigen, dass für jedes $p \in S$ eine Karte (U,φ) von M existiert, sodass $S \cap U$ ein $(n-m)$-Slice der Karte (U,φ) ist. Sei $p \in S$ und sei (V,ψ) eine um q zentrierte Karte mit Koordinatenfunktionen $\{y^1,\dots,y^n\}$. Da $(F_*)_p$ surjektiv ist, existieren nach Proposition 4.1.3 glatte Funktionen $x^{n+1},\dots,x^m$, die in einer offenen Umgebung von p definiert sind, sodass

$$x^1 := y^1 \circ F, \dots, x^n := y^n \circ F, x^{n+1}, \dots, x^m$$

die Koordinatenfunktionen einer Karte (U,φ) um p sind. Wir behaupten:

$$S \cap U = \{\widetilde{p} \in U | x^1(\widetilde{p}) = 0, \dots, x^n(\widetilde{p}) = 0\}.$$

In der Tat: Für $1 \le i \le n$ und $\widetilde{p} \in U$ gilt nach Definition $x^i(\widetilde{p}) = y^i(F(\widetilde{p}))$. Außerdem ist $\widetilde{p}$ genau dann in S, wenn $F(\widetilde{p}) = q$, also genau dann, wenn $y^i(F(\widetilde{p})) = y^i(q) = 0$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$. Somit ist $S \cap U$ ein $(m-n)$-Slice der Karte (U,φ).

Die Eindeutigkeit einer Mannigfaltigkeitsstruktur auf S, mit der S eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M ist, folgt aus Proposition 4.3.7. $\square$

Beispiel 4.3.14. Betrachte die glatte Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \qquad (\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) \to \sum_i (\xi^i)^2.$$

Für $p \coloneqq (\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist die darstellende Matrix von $(f_*)_p$ in Standardkoordinaten durch

$$\begin{pmatrix} 2\xi^1 & \cdots & 2\xi^{n+1} \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Abbildung $(f_*)_p$ ist also für alle $p \neq 0$ surjektiv. Sei $R > 0$. Die Menge $f^{-1}(R^2)$ ist die n-dimensionale Sphäre $S^n(R)$ mit Radius R. Nach Proposition 4.3.12 existiert genau eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf $S^n(R)$, sodass $S^n(R)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Wegen der Eindeutigkeit dieser Mannigfaltigkeitsstruktur sehen wir, dass sie genau die vorher betrachtete Standard-Mannigfaltigkeitsstruktur auf $S^n(R)$ ist.

Beispiel 4.3.15. Betrachte die glatte Abbildung $\det\colon \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Sei id_n die $n \times n$ Identitätsmatrix. Wir haben gesehen (vgl. Aufgabe 1.2.16 und Aufgabe 3.2.8), dass, nach kanonischer Identifikation $T_{\mathrm{id}_n} \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ und $T_1\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, die Abbildung $(\det_*)_{\mathrm{id}_n}$ mit der Spurabbildung $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ übereinstimmt. Im Folgenden identifizieren wir stets die Tangentialräume von $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$. Für $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ berechnen wir nun $(\det_*)_A\colon \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Betrachte die lineare Abbildung

$$L_A\colon \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M_n}(\mathbb{R}) \qquad B \mapsto AB,$$

die wir auf $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ einschränken können, um die Abbildung $L_A\colon \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ zu erhalten. Da die Abbildung L_A linear ist, stimmt ihr Differential $((L_A)_*)_C$ für alle $C \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ mit L_A überein. Betrachte nun die Verkettung

$$\det \circ L_A\colon \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

Wegen der Multiplikativität von det gilt $\det \circ L_A = \det(A)\det$. Daraus folgt, dass

$$((\det \circ L_A)_*)_{\mathrm{id}_n} = (\det_*)_A \circ L_A = ((\det(A)\det)_*)_{\mathrm{id}_n} = \det(A)(\det_*)_{\mathrm{id}_n} = \det(A)\mathrm{tr}.$$

Daraus ergibt sich

$$(\det_*)_A = \det(A)\mathrm{tr} \circ (L_A)^{-1} = \det(A)\mathrm{tr} \circ L_{A^{-1}}.$$

Also gilt für alle $B \in T_A \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$

$$(\det_*)_A = \det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}B).$$

Da für alle $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ ein $B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ mit $\det(A)\mathrm{tr}(A^{-1}B) \neq 0$ existiert (z. B. $B = A^{-1}$), ist $(\det_*)_A$ für alle $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ surjektiv. Aus Proposition 4.3.12 folgt, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Menge $\det^{-1}(x)$ eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt, die sie zu einer (n^2-1)-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ macht. Für $x = 1$ erhalten wir so eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf der speziellen lineare Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$.

Aufgabe 4.3.16. Zeigen Sie, dass es eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ gibt, die sie zu einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ macht, und bestimmen sie die Dimension von $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (als Mannigfaltigkeit). Hinweis: Sei sym_n der Vektorraum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Betrachten sie die Abbildung

$$\mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{sym}_n(\mathbb{R}) \qquad A \mapsto A^tA.$$

Bemerkung 4.3.17. Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $q \in N$. Es kann vorkommen, dass $(F_*)_p$ nicht für alle $p \in F^{-1}(q)$ surjektiv ist, aber $F^{-1}(p)$ trotzdem eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M ist. Ein triviales Beispiel ist die konstante Null-Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Das Urbild von 0 ist die Menge $\mathbb{R}^n$, die mit ihrer Standard-Mannigfaltigkeitsstruktur eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von sich selbst ist.

Aufgabe 4.3.18. Betrachten Sie die glatte Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \to (\xi^1)^2 + (\xi^2) - (\xi^3)^2.$$

Für welches $R \in \mathbb{R}$ kann die Menge $f^{-1}(R)$ mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen werden, die sie zu einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ macht. Skizzieren Sie $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(0)$ und $f^{-1}(1)$.

Wir erwähnen die folgende Verallgemeinerung von Proposition 4.3.12 ohne Beweis.

Proposition 4.3.19. *Sei M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei P eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit von N und $\iota\colon P \to N$ die Inklusionsabbildung. Falls für jedes $q \in F^{-1}(P)$*

$$T_{F(q)}N = (F_*)_q(T_qM) + (\iota_*)_{F(q)}(T_{F(q)}P),$$

dann existiert eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf $L := F^{-1}(P)$, die sie zu einer $(m-n+p)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von M macht.

Falls P zusätzlich eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von N ist, existiert eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur auf L, die sie zu einer eingebetteten $(m-n+p)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von M macht.

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Nicht jede eingebettete Untermannigfaltigkeit von M ist eine reguläre Niveaumenge einer glatten Abbildung $F\colon M \to N$ in einer Mannigfaltigkeit N. Da Niveaumengen immer abgeschlossen sind, sind triviale Beispiele solcher eingebetteten Untermannigfaltigkeiten nicht abgeschlossene eingebettete Untermannigfaltigkeiten; z. B. $(-1,1) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Es gilt jedoch die folgende

Proposition 4.3.20. *Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $S \subset M$. Die Menge S besitzt genau dann eine Mannigfaltigkeitsstruktur, die sie zu einer k-dimensionalen eingebetteten Untermannigfaltigkeit von M macht, wenn für jedes $p \in S$ eine offene Umgebung U von p und eine glatte Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^{m-k}$ existieren, sodass $U \cap S$ eine reguläre Niveaumenge von F ist.*

Beweis. Sei S eine k-dimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit von M. Für $p \in S$ existiert nach Proposition 4.3.10 eine um p zentrierte Karte (U, φ) von M, sodass

$$U \cap S = \{q \in U | x^{k+1}(q) = 0, \dots, x^{m-k}(q) = 0\},$$

wobei $\{x^1, \dots, x^n\}$ die Koordinatenfunktionen von (U, φ) bezeichnen. Betrachte die glatte Abbildung

$$F\colon U \to \mathbb{R}^{m-k} \qquad q \mapsto (x^{k+1}(q), \dots, x^m(q)).$$

Es gilt $S \cap U = F^{-1}(0)$. Weiterhin gilt für alle $q \in U$

$$(F^*)_{F(q)}(\mathrm{d}r^1|_{F(q)}) = \mathrm{d}x^{k+1}|_q \dots, (F^*)_{F(q)}(\mathrm{d}r^{m-k}|_{F(q)}) = \mathrm{d}x^m|_q.$$

Daraus folgt die Injektivität von $(F^*)_{F(q)}$ und damit die Surjektivität von $(F_*)_q$. Die Menge $S \cap U$ ist also eine reguläre Niveaumenge von F. Sei nun umgekehrt S so, dass für jedes $p \in S$ eine offene Umgebung U von p und eine glatte Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^{m-k}$ existieren, sodass $U \cap S$ eine reguläre Niveaumenge von F ist. Nach Proposition 4.3.12 besitzt die Menge $U \cap S$ eine Mannigfaltigkeitsstruktur, die sie zu einer k-dimensionalen eingebetteten Untermannigfaltigkeit von U macht. Nach Proposition 4.3.10 existiert für jeden Punkt $p \in S \cap U$ eine Karte $(V \subset U, \psi)$ von U (und damit von M) um p, sodass $(S \cap U) \cap V = S \cap V$ ein k-Slice der Karte (V, ψ) ist. Aus Proposition 4.3.10 folgt, dass S eine Mannigfaltigkeitsstruktur besitzt, die sie zu einer k-dimensionalen eingebetteten Untermannigfaltigkeit von M macht. $\square$

Aufgabe 4.3.21. Wir bezeichnen mit H die offene Teilmenge

$$\{(r, z) | r > 0, z \in \mathbb{R}\}$$

von $\mathbb{R}^2$. Sei C eine eindimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit von H. Wir bezeichnen mit S_C die *Rotationsfläche*

$$\{(x, y, z) | (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in C\}.$$

Wenn wir H als eine offene Teilmenge der xz-Ebene visualisieren, erhalten wir S_C durch die Rotation von C um die z-Achse. Zeigen Sie, dass S_C eine zweidimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

4.4 Tangentialräume von und Vektorfelder entlang Untermannigfaltigkeiten

4.4.1 Tangentialräume von Untermannigfaltigkeiten

Sei S eine Untermannigfaltigkeit oder eine eingebettete Untermannigfaltigkeit einer Mannigfaltigkeit M und sei $\iota\colon S \to M$ die Inklusionsabbildung. Da ι nach Definition eine Immersion ist, ist $(\iota_*)_p\colon T_pS \to T_pM$ eine injektive Abbildung. Wir werden im Folgenden häufiger Tangentialvektoren $v \in T_pS$ mit $(\iota_*)_p(v) \in T_pM$ identifizieren und so T_pS als eine Teilmenge von T_pM betrachten. Zunächst formulieren und beweisen wir eine Proposition, die uns erlaubt, die Tangentialräume von regulären Niveaumengen einer glatten Abbildung mithilfe der Abbildung zu bestimmen.

Proposition 4.4.1. *Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei S eine reguläre Niveaumenge von F versehen mit der Mannigfaltigkeitsstruktur, die sie zu einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit von M macht. Sei $p \in S$. Es gilt*

$$T_pS = \ker(F_*)_p.$$

Beweis. Da $\dim S = \dim \ker(F_*)_p$, reicht es zu zeigen, dass $(\iota_*)_p(T_pS) \subset \ker(F_*)_p$. Sei $v \in T_pS$ und sei $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ eine C^1-Kurve mit $\dot\gamma(0) = v$. Es gilt dann

$$(\iota_*)_p(v) = (\iota \dot{\circ} \gamma)(0).$$

Sei $[f] \in GC_p^\infty(N)$. Dann gilt

$$(F_*)_p\left((\iota_*)_p(v)\right)(f) = (\iota_*)_p(v)(f \circ F) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ F \circ \iota \circ \gamma)\right)(0) = 0,$$

da $\iota \circ \gamma$ in einer Niveaumenge von F liegt und $F \circ \iota \circ \gamma$ daher konstant ist. Da $[f] \in GC_p^\infty(N)$ beliebig war, folgt daraus $(\iota_*)_p(v) \in \ker(F_*)_p$. $\square$

Beispiel 4.4.2. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \qquad (\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) \to \sum_i (\xi^i)^2$$

und ihre reguläre Niveaumenge $S^n = f^{-1}(1)$. Da der Tangentialraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ an jedem Punkt p mithilfe des kanonischen Isomorphismuses

$$T_p\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \sum_i \zeta^i \frac{\partial}{\partial r^i}|_p \mapsto (\zeta^1, \dots, \zeta^{n+1})$$

mit $\mathbb{R}^{n+1}$ identifiziert werden kann, können wir für $p \in S^n$ den Tangentialraum T_pS^n mit einem Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren. Nach Proposition 4.4.1 müssen wir dafür $\ker(f_*)_p$ berechnen. Für $p := (\xi^1, \dots, \xi^{n+1}) \in S^n$ ist die darstellende Matrix von $(f_*)_p$ in Standardkoordinaten durch

$$\begin{pmatrix} 2\xi^1 & \cdots & 2\xi^{n+1} \end{pmatrix}$$

gegeben. Daraus erhalten wir

$$\ker(f_*)_p = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle 2p, v\rangle = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle p, v\rangle = 0\},$$

wobei wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen. Der Tangentialraum T_pS^n kann also mit der Hyperfläche, die zum p orthogonal ist, identifiziert werden.

Beispiel 4.4.3. Die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist eine reguläre Niveaumenge von $\det\colon \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Nach der Identifikation $T_{\mathrm{id}_n} \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ können wir $T_{\mathrm{id}_n}\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ mit einem Teilraum von $\mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ identifizieren. Da $(\det_*)_{\mathrm{id}_n} = \mathrm{tr}$, ist dieser Teilraum genau der Vektorraum der spurfreien $n \times n$ Matrizen.

Aufgabe 4.4.4. Betrachten Sie die Menge

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Menge S versehen mit der Teilraumtopologie eine differenzierbare Struktur besitzt, die sie zu einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit macht.

(ii) Zeigen Sie, dass keine Mannigfaltigkeitsstrukturen auf S existieren, die S zu einer Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ machen.

4.4.2 Vektorfelder entlang Untermannigfaltigkeiten

Die Begriffe und Resultate in diesem Abschnitt sind für unsere spätere Diskussion über induzierte Orientierungen auf Untermannigfaltigkeiten relevant. Sie haben aber natürlich weitere Anwendungen.

Definition 4.4.5. Seien M und N Mannigfaltigkeiten oder Mannigfaltigkeiten mit Rand und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Eine glatte Abbildung $X\colon M \to TN$ mit der Eigenschaft $\pi_{TN} \circ X = F$ heißt ein *Vektorfeld entlang der Abbildung F*. Mit anderen Worten: Ein Vektorfeld entlang der Abbildung F ist eine glatte Abbildung $X\colon M \to TN$ mit $X(p) \in T_{F(p)}N$ für alle $p \in M$. Der Raum aller Vektorfelder entlang F wird im Folgenden mit $\mathfrak{X}(F)$ bezeichnet.

Wir interessieren uns hier nur für Vektorfelder entlang von Inklusionsabbildungen eingebetteter Untermannigfaltigkeiten. Im Fall einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit S einer Mannigfaltigkeit M kann ein Vektorfeld entlang der Inklusionsabbildung $\iota\colon S \to M$ als ein Vektorfeld auf M interpretiert werden, das nur auf S definiert ist. Die folgende Proposition spielt eine Rolle bei der Definition von Stokes-Orientierung auf dem Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit mit Rand (folgt später).

Proposition 4.4.6. *Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $\iota\colon \partial M \to M$ die Inklusionsabbildung. Dann existiert ein nach innen zeigendes Vektorfeld entlang ι, d. h. ein Vektorfeld $X\colon \partial M \to TM$ entlang ι, sodass $X(p)$ für jedes $p \in M$ ein nach innen zeigender Tangentialvektor ist.*

Beweis. Wir setzen $n := \dim M$. Sei $p \in \partial M$ und sei (U, φ) eine Karte von M um p. Wir setzen $V := U \cap \partial M$. Die glatte Abbildung

$$X_V\colon V \to TM \qquad p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$$

ist ein nach innen zeigendes Vektorfeld entlang der Inklusionsabbildung $\iota_V\colon V \to M$. Für jedes $p \in \partial M$ existiert also eine offene Umgebung V von p in ∂M und ein nach innen zeigendes Vektorfeld X_V entlang der Inklusionsabbildung $\iota_V \to M$. Sei $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine Überdeckung von ∂M mit solchen offenen Teilmengen und sei X_{V_α} ein nach innen zeigendes Vektorfeld entlang der Inklusionsabbildung ι_{V_α}. Sei $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Dann ist

$$X\colon \partial M \to TM \qquad p \mapsto \sum_\alpha \eta_\alpha(p) X_\alpha(p)$$

ein nach innen zeigendes Vektorfeld entlang ι. □

4.5 Einbettungssätze

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die folgende Frage ist natürlich: Kann M als eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ realisiert werden? Präziser: Existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Einbettung $\iota\colon M \to \mathbb{R}^N$? In diesem Fall können wir $\iota(M)$ auf natürliche Weise mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen, die es zu einer eingebetteten Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ macht. Versehen mit dieser Mannigfaltigkeitsstruktur ist $\iota(M)$ diffeomorph zu M ist. Wir können M dann für alle praktischen Zwecke als eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ betrachten. Wir erwähnen die folgende fundamentale Aussage zu dieser Problematik ohne Beweis.

Theorem 4.5.1 (Einbettungssatz von Whitney)**.** *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Einbettung $\iota\colon M \to \mathbb{R}^{2n}$.*

Bemerkung 4.5.2. Der Einbettungssatz von Whitney ist im folgenden Sinne optimal: Es gibt n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die sich nicht in $\mathbb{R}^m$ mit $m < 2n$ einbetten lassen. Ein Beispiel ist der zweidimensionale projektive Raum $\mathbb{RP}^2$, der sich nicht in $\mathbb{R}^3$ einbetten lässt (diese Aussage kann mittels der Theorie der charakteristischen Klassen bewiesen werden).

Der Beweis der folgenden Aussage ist viel einfacher.

Proposition 4.5.3. *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Einbettung $\iota\colon M \to \mathbb{R}^N$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 4.5.4 □

Aufgabe 4.5.4. Sei M eine kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

(i) Finden Sie eine Überdeckung $\{V_i\}_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ von M und offene Teilmengen U_i von M, sodass $\overline{V_i} \subset U_i$ und U_i diffeomorph zu einem offenen Ball von $\mathbb{R}^n$ ist.

(ii) Finden Sie eine Einbettung $\iota\colon M \to \mathbb{R}^{(n+1)p}$. (Hinweis: Benutzen Sie die vorherige Teilaufgabe und betrachten sie glatte Funktionen $0 < \eta_i < 1$ auf M mit $\operatorname{supp} \eta_i \subset U_i$, $\eta_i|_{V_i} \equiv 1$.)

Kapitel 5

Tensorprodukte und Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten

5.1 Algebraische Grundlagen

5.1.1 Das Tensorprodukt

Seien U und V $\mathbb{K}$-Vektorräume ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Wir betrachten das folgende „universelle Problem“: Gibt es ein Paar (T, θ), wobei T ein Vektorraum ist und $\theta \colon U \times V \to T$ eine bilineare Abbildung, sodass für jeden anderen Vektorraum W und eine bilineare Abbildung $\varphi \colon U \times V \to W$ eine eindeutig lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} \colon T \to W$ existiert, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}"] & \\ U \times V \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "\varphi"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit eines solchen Paars bis auf einen kanonischen Isomorphismus.

Proposition 5.1.1. *Seien U und V wie oben und seien (T, θ) und (T', θ') zwei Paare mit der obigen Eigenschaft. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\psi \colon T \to T'$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & U \times V \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dr, "\theta'"] & \\ T \arrow[rr, "\psi"] & & T' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Weiterhin ist ψ ein Isomorphismus.

Beweis. Da (T, θ) die obige „universelle“ Eigenschaft hat und da θ' bilinear ist, existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\psi \colon T \to T'$, sodass

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "\psi"] & \\ U \times V \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "\theta'"] & T' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Das beweist den ersten Teil der Proposition. Wir zeigen nun, dass ψ ein Isomorphismus ist. Da (T', θ') die obige universelle Eigenschaft hat und da θ bilinear ist, existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\psi'\colon T' \to T$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[dr, "\psi'"] & \\ U \times V \arrow[u, "\theta'"] \arrow[r, "\theta"] & T \end{tikzcd}$$

kommutiert. Aus der obigen Diskussion folgt die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "\psi"] & & \\ & T' \arrow[dr, "\psi'"] & \\ U \times V \arrow[uu, "\theta"] \arrow[ur, "\theta'"] \arrow[rr, "\theta"] & & T \end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft von (T, θ) impliziert $\psi' \circ \psi = \mathrm{id}_T$. Durch Tauschen der Rollen von (T, θ) und (T', θ') ergibt sich $\psi \circ \psi' = \mathrm{id}_{T'}$. Daraus folgt, dass ψ ein Isomorphismus ist. $\square$

Proposition 5.1.2. *Seien U und V wie oben. Dann existiert ein Paar (T, θ) mit der obigen universellen Eigenschaft.*

Bemerkung 5.1.3. Der Beweis von Proposition 5.1.2 ist für uns nicht interessant. Da werden normalerweise T als ein Quotient eines freien Vektorraum erzeugt durch Elemente von $U \times V$ konstruiert. Diese Konstruktion ist bei unseren konkreten Probleme meist nicht hilfreich. Wichtig ist, dass so ein Paar (T, θ) existiert und dass es, nach Proposition 5.1.1, bis auf einen kanonischen Isomorphismen eindeutig ist. Alle weitere Eigenschaften dieses Paars folgen direkt aus seiner universellen Eigenschaft.

Definition 5.1.4. Seien U und V wie oben. Das Paar (T, θ) mit der obigen universellen Eigenschaft heißt das *Tensorprodukt* von U und V. Wir werden die Bezeichnung $U \otimes V$ für T und die Bezeichnung $\otimes$ für θ verwenden. Weiterhin schreiben wir $u \otimes v$ statt $\otimes(u, v)$ für $u \in U$ und $v \in V$. Elemente der Form $u \otimes v \in U \otimes V$ heißen *Elementartensoren*.

Bemerkung 5.1.5. Nicht jedes Element von $U \otimes V$ ist ein Elementartensor. Man kann jedoch zeigen, dass jedes Element von $U \otimes V$ eine endliche Linearkombination von Elementartensoren ist. Siehe Proposition 5.1.16 unten für den endlich-dimensionalen Fall,

Proposition 5.1.6. *Seien U, V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume.*

1. *Es existiert ein eindeutiger Isomorphismus $U \otimes V \cong V \otimes U$, der, für alle $u \in U$ und $v \in V$, $u \otimes v$ auf $v \otimes u$ abbildet.*

2. *Es existiert ein eindeutiger Isomorphismus $U \otimes (V \otimes W) \cong (U \otimes V) \otimes W$, der, für alle $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$, $u \otimes (v \otimes w)$ auf $(u \otimes v) \otimes w$ abbildet.*

3. *Es existiert ein eindeutiger Isomorphismus $(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$, der, für alle $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$, $(u, v) \otimes w$ auf $(u \otimes w, v \otimes w)$ abbildet.*

4. *Es existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\mathbb{K} \otimes U \cong U$, der, für alle $r \in \mathbb{R}$ und $u \in U$, $r \otimes u$ auf ru abbildet.*

Beweis. Wir beweisen nur 1. Der Beweis der restlichen Aussagen sind ähnlich. Die Abbildung

$$t\colon U \times V \to V \otimes U \qquad (u, v) \mapsto v \otimes u$$

ist bilinear. Die universelle Eigenschaft von $U \otimes V$ impliziert die Existenz einer eindeutigen linearen Abbildung $\widetilde{t}\colon U \otimes V \to V \otimes U$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \otimes V \arrow[dr, "\widetilde{t}"] & \\
U \times V \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "t"] & V \otimes U
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Insbesondere gilt $\widetilde{t}(u \otimes v) = v \otimes u$. Andererseits ist die Abbildung

$$s\colon V \times U \to U \otimes V \qquad (v, u) \mapsto u \otimes v$$

bilinear und es existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\widetilde{s}\colon V \otimes U \to U \otimes V$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \otimes U \arrow[dr, "\widetilde{s}"] & \\
V \times U \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "s"] & U \otimes V
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei $\tau\colon U \times V \to V \times U$ die Abbildung, die (u, v) auf (v, u) abbildet. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \otimes V \arrow[dr, "\widetilde{t}"] & & \\
& V \otimes U \arrow[dr, "\widetilde{s}"] & \\
U \times V \arrow[uu, "\otimes"] \arrow[ur, "t"] \arrow[r, "\tau"] & V \times U \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "s"] & U \otimes V
\end{tikzcd}.$$

Die Abbildung, die durch die Komposition

$$U \times V \xrightarrow{\tau} V \times U \xrightarrow{s} U \otimes V$$

gegeben ist, ist genau die Tensorproduktabbildung $\otimes\colon U \times V \to U \otimes V$. Aus der universellen Eigenschaft von $U \otimes V$ folgt, dass die Komposition

$$U \otimes V \xrightarrow{\widetilde{t}} V \otimes U \xrightarrow{\widetilde{s}} U \otimes V$$

die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_{U \otimes V}$ ist. Analog zeigt man, dass

$$V \otimes U \xrightarrow{\widetilde{s}} U \otimes V \xrightarrow{\widetilde{t}} V \otimes U$$

die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_{V \otimes U}$ ist. Die Abbildung $\widetilde{t}$ ist der gesuchte Isomorphismus. Falls $t'\colon U \otimes V \to V \otimes U$ eine weitere Abbildung mit $t'(u \otimes v) = v \otimes u$ ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \otimes V \arrow[dr, "t'"] & \\
U \times V \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "t"] & V \otimes U.
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt $t' = \widetilde{t}$ und damit die Eindeutigkeitsaussage in der Behauptung. □

Proposition 5.1.7. *Seien U_1, U_2, V_1 und V_2 Vektorräume und $f_i \colon U_i \to V_i$ für $i \in \{1,2\}$ eine lineare Abbildung. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $f_1 \otimes f_2 \colon U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2$, die $u_1 \otimes u_2$ für alle $u_i \in U_i$ auf $f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)$ abbildet.*

Beweis. Betrachte die bilineare Abbildung

$$f \colon U_1 \times U_2 \to V_1 \otimes V_2 \qquad (u_1, u_2) \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2).$$

Für jede lineare Abbildung $\widetilde{f} \colon U_1 \otimes U_2 \to V_1 \otimes V_2$, die $u_1 \otimes u_2$ für alle $u_i \in U_i$ auf $f_1(u_1) \otimes f_2(u_2)$ abbildet, kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_1 \otimes U_2 \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ U_1 \times U_2 \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "f"] & V_1 \otimes V_2 \end{tikzcd} .$$

Wegen der universellen Eigenschaft von $U_1 \otimes U_2$ existiert genau eine solche lineare Abbildung, die wir mit $f_1 \otimes f_2$ bezeichnen. □

Beispiel 5.1.8. Seien U und V Vektorräume. Wir bezeichnen mit id_U, id_V und $\mathrm{id}_{U \otimes V}$ die Identitätsabbildungen von U, V bzw. $U \otimes V$. Die Abbildung $\mathrm{id}_{U \otimes V}$ ist eine lineare Abbildung, die $u \otimes v$ für alle $u \in U$ und $v \in V$ auf $u \otimes v = \mathrm{id}_U(u) \otimes \mathrm{id}_V(v)$ abbildet. Daraus folgt $\mathrm{id}_U \otimes \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{U \otimes V}$.

Proposition 5.1.9. *Seien U_1, U_2, V_1, V_2, W_1 und W_2 Vektorräume. Seien $f_i \colon U_i \to V_i$ und $g_i \colon V_i \to W_i$ lineare Abbildungen. Dann gilt*

$$(g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2) = (g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2).$$

Beweis. Sei $h \colon U_1 \times U_2 \to W_1 \otimes W_2$ die bilineare Abbildung, die durch

$$(u_1, u_2) \mapsto g_1 \circ f_1(u_1) \otimes g_2 \circ f_2(u_2)$$

gegeben ist. $(g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$ ist die eindeutige lineare Abbildung, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_1 \otimes U_2 \arrow[dr, "(g_1 \circ f_1)\otimes(g_2 \circ f_2)"] & \\ U_1 \times U_2 \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "h"] & W_1 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Behauptung folgt, wenn wir die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} U_1 \otimes U_2 \arrow[dr, "(g_1 \otimes g_2)\circ(f_1 \otimes f_2)"] & \\ U_1 \times U_2 \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "h"] & W_1 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$

zeigen können. Betrachte die bilinearen Abbildungen

$$f \colon U_1 \times U_2 \to V_1 \otimes V_2 \qquad (u_1, u_2) \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2),$$

$$g \colon V_1 \times V_2 \to W_1 \otimes W_2 \qquad (v_1, v_2) \mapsto g_1(v_1) \otimes g_2(v_2)$$

und

$$(f_1, f_2) \colon U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2 \qquad (u_1, u_2) \mapsto (f_1(u_1), f_2(u_2)).$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_1 \otimes U_2 \arrow[dr, "f_1\otimes f_2"] & & \\
& V_1 \otimes V_2 \arrow[dr, "g_1\otimes g_2"] & \\
U_1 \times U_2 \arrow[uu, "\otimes"] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "(f_1,f_2)"] & V_1 \times V_2 \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "g"] & W_1 \otimes W_2
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ und

$$U_1 \times U_2 \xrightarrow{(f_1,f_2)} V_1 \times V_2 \xrightarrow{g} W_1 \otimes W_2$$

ist die bilineare Abbildung h. □

Korollar 5.1.10. Seien U_1, U_2, V_1 und V_2 Vektorräume. Für $i \in \{1,2\}$ seien $f_i \colon U_i \to V_i$ Isomorphismen. Dann ist $f_1 \otimes f_2$ ein Isomorphismus.

Beweis. Nach Proposition 5.1.9 ist $f_1^{-1} \otimes f_2^{-1}$ die Inverse zu $f_1 \otimes f_2$. □

Beispiel 5.1.11. Sei U ein m-dimensionaler und V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gibt es einen Isomorphismus $U \otimes V \cong \mathbb{K}^m \otimes \mathbb{K}^n$.

Proposition 5.1.12. *Seien U und V endlich-dimensionale Vektorräume. Dann ist $U \otimes V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit* $\dim U \otimes V = \dim U \cdot \dim V$.

Aufgabe 5.1.13. Beweisen Sie Proposition 5.1.12. Hinweis: Proposition 5.1.6 kann hilfreich sein.

Proposition 5.1.14. *Seien U und V endlich-dimensionale Vektorräume. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus* $\mathrm{L}(U;V) \cong U^* \otimes V$. *Explizit: Es existiert ein kanonischer Isomorphismus, der $u^* \otimes v$ für alle $u^* \in U^*$ und $v \in V$ auf die lineare Abbildung*

$$(u \mapsto u^*(u)v)$$

abbildet.

Beweis. Die Abbildung

$$U^* \times V \to \mathrm{L}(U;V) \qquad (u^*, v) \mapsto (u \mapsto u^*(u)v)$$

ist bilinear und induziert eine lineare Abbildung $U^* \otimes V \to \mathrm{L}(U;V)$, die $u^* \otimes v$ für alle $u^* \in U^*$ und $v \in V$ auf die lineare Abbildung $(u \mapsto u^*(u)v)$ abbildet. Die Vektorräume $U^* \otimes V$ und $\mathrm{L}(U;V)$ haben die gleiche Dimension. Daher reicht es, die Surjektivität der Abbildung $U^* \otimes V \to \mathrm{L}(U;V)$ zu zeigen. Seien $\{u_1, \cdots, u_m\}$ und $\{v_1, \cdots v_n\}$ Basen von U bzw. V und $\{u_1^*, \cdots, u_m^*\}$ die duale Basis zu $\{u_1, \cdots, u_m\} \subset U^*$. Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ ist die darstellende Matrix der Abbildung $(u \mapsto u_i^*(u) \cdot v_j)$ bezüglich der Basen $\{u_1, \cdots, u_m\}$ und $\{v_1, \cdots v_n\}$ die Matrix mit dem Eintrag 1 an der Stelle ji und 0 sonst. Daher spannt die Familie

$$\{(u \mapsto u_i^*(u) \cdot v_j)\} \subset \mathrm{L}(U;V)$$

den Raum $\mathrm{L}(U;V)$ auf. Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 5.1.15. Aus Lineare Algebra wissen wir, dass die Abbildung

$$U \to (U^*)^* \qquad u \mapsto (v^* \mapsto v^*(u))$$

für jeden endlich-dimensionalen Vektorraum U ein kanonischer Isomorphismus ist und daher einen kanonischen Isomorphismus $U \otimes V \cong (U^*)^* \otimes V$ induziert. Aus dieser Beobachtung und Proposition 5.1.14 erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $U \otimes V \cong \mathrm{L}(U^*; V)$. Man kann diesen Isomorphismus, wie im Beweis von Proposition 5.1.14, auch direkt konstruieren.

Mithilfe von Bemerkung 5.1.15 und des Beweises von Proposition 5.1.14 kann man die folgende Proposition beweisen:

Proposition 5.1.16. *Seien U und V endlich-dimensionale Vektorräume und $\{u_1, \cdots, u_m\}$ und $\{v_1, \cdots, v_n\}$ Basen von U bzw. V. Dann ist $\{u_i \otimes v_j\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Basis von $U \otimes V$.*

Aufgabe 5.1.17. Beweisen Sie Proposition 5.1.16.

Notation 5.1.18. Seien $V_1, \ldots, V_k$ und W Vektorräume (über einen Körper $\mathbb{K}$). Wir bezeichnen mit $\mathrm{M}(V_1, \ldots, V_k; W)$ den Vektorraum der multilinearen Abbildungen von $V_1 \times \cdots \times V_k$ nach W. Weiterhin setzen wir für einen Vektorraum V

$$\mathrm{M}_k(V; W) \coloneqq \mathrm{M}(\underbrace{V, \cdots, V}_{k\text{-mal}}; W)$$

und

$$\mathrm{M}_k(V) \coloneqq \mathrm{M}(\underbrace{V, \cdots, V}_{k\text{-mal}}; \mathbb{K}).$$

Die folgende Proposition ist eine unmittelbare Folgerung der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

Proposition 5.1.19. *Seien U, V und W Vektorräume. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$\mathrm{L}(U \otimes V; W) \to \mathrm{M}(U, V; W),$$

der $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{L}(U \otimes V; W)$ auf die bilineare Abbildung $\alpha \in \mathrm{M}(U, V; W)$ mit

$$\alpha(u, v) = \widetilde{\alpha}(u \otimes v) = (\widetilde{\alpha} \circ \otimes)(u, v)$$

abbildet.

Beweis. Betrachte die lineare Abbildung

$$\mathrm{L}(U \otimes V; W) \to \mathrm{M}(U, V; W) \qquad \widetilde{\alpha} \mapsto (\widetilde{\alpha} \circ \otimes).$$

Diese Abbildung ist surjektiv, weil, aufgrund der universellen Eigenschaft von $U \otimes V$, für jede bilineare Abbildung $\alpha\colon U \times V \to W$ eine lineare Abbildung $\widetilde{\alpha}\colon U \otimes V \to W$ mit $\alpha = \widetilde{\alpha} \circ \otimes$ existiert. Die Injektivität der obigen Abbildung folgt aus der Tatsache, dass genau ein $\widetilde{\alpha}$ mit $\alpha = \widetilde{\alpha} \circ \otimes$ existiert. □

Seien $V_1, \ldots, V_k$ Vektorräume. Wegen Teil 2 von Proposition 5.1.6 können wir den Vektorraum $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ und die Abbildung

$$\otimes\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \qquad (v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k,$$

die wir mit etwas Notationsmissbrauch mit $\otimes$ bezeichnet haben, unabhängig von der Reihenfolge der Tensorproduktbildung, bis auf einen kanonischen Isomorphismus definieren. Mit einer iterierten Anwendung der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts erhalten wir die folgende

Proposition 5.1.20. *Seien $V_1, \ldots, V_k$ und W Vektorräume. Sei $\varphi \in \mathrm{M}(V_1, \ldots, V_k; W)$. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\widetilde{\varphi}\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to W$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}"] & \\
V_1 \times \cdots \times V_k \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "\varphi"] & W
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Das folgende Korollar ist eine Verallgemeinerung von Proposition 5.1.19 und wird analog zu dieser Proposition bewiesen.

Korollar 5.1.21. Seien $V_1, \ldots, V_k$ und W Vektorräume. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$\mathrm{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k; W) \to \mathrm{M}(V_1, \ldots, V_k; W),$$

der $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k; W)$ auf die multilineare Abbildung $\alpha \in \mathrm{M}(V_1, \ldots, V_k; W)$ mit

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \widetilde{\alpha}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$$

abbildet.

Bemerkung 5.1.22. In der Situation vom Korollar 5.1.21 mit $W = \mathbb{K}$ erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus

$$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)^* \cong \mathrm{M}(V_1, \ldots, V_k; \mathbb{K}).$$

5.1.2 Die Tensoralgebra

Definition 5.1.23. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $r, s \in \mathbb{N}_0$. Falls $r = s = 0$ setzen wir $T_0^0(V) := \mathbb{K}$, sonst

$$T_s^r(V) := \underbrace{V \otimes \cdots V \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}.$$

Elemente von $T_s^r(V)$ heißen *Tensoren vom Typ* (r, s) oder *r-fach kontravariante und s-fach kovariante Tensoren.*

Bemerkung 5.1.24. Für $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $v_1^*, \ldots, v_s^* \in V^*$ nennen wir Tensoren der Form $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^* \in T_s^r(V)$ *Elementartensoren.* Aus Proposition 5.1.16 folgt, dass, falls V endlich-dimensional ist, Elementartensoren vom Typ (r, s) den Vektorraum $T_s^r(V)$ erzeugen. Man kann zeigen, dass diese Aussage auch im unendlich-dimensionalen Fall gültig ist.

Sei V ein Vektorraum und seien $r, s, r', s' \in \mathbb{N}_0$.

- *Fall* $r = s = 0$: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus (vgl.Teil 4 von Proposition 5.1.6)

  $$T_s^r(V) \otimes T_{s'}^{r'}(V) = \mathbb{K} \otimes T_{s'}^{r'}(V) \cong T_{s+s'}^{r+r'}(V) = T_{s'}^{r'}(V),$$

  der auf Elementartensoren durch

  $$r \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r'} \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_{s'}^*) \mapsto r\,(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r'} \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_{s'}^*)$$

  gegeben ist.

- *Fall* $r' = s' = 0$: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus (vgl.Teil 4 von Proposition 5.1.6)
$$T_s^r(V) \otimes T_{s'}^{r'}(V) = T_s^r(V) \otimes \mathbb{K} \cong T_{s+s'}^{r+r'}(V) = T_s^r(V),$$
der auf Elementartensoren durch
$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^*) \otimes r \mapsto r\,(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^*)$$
gegeben ist.

- *Sonstige Fälle*: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus (vgl.Teil 1 von Proposition 5.1.6)
$$T_s^r(V) \otimes T_{s'}^{r'}(V) \cong T_{s+s'}^{r+r'}(V),$$
der auf Elementartensoren durch
$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^*) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r'} \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_{s'}^*) \mapsto$$
$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_{r'} \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^* \otimes w_1^* \otimes \cdots \otimes w_{s'}^*$$
gegeben ist.

Sei $T \in T_s^r(V)$ und $T' \in T_{s'}^{r'}(V)$. Mithilfe des obigen Isomorphismuses werden wir im Folgenden $T \otimes T'$ als ein Element von $T_{s+s'}^{r+r'}(V)$ betrachten. Wir betrachten den Vektorraum
$$T(V) := \bigoplus_{r,s \in \mathbb{N}_0} T_s^r(V).$$
Wir können auf folgende Weise ein Produkt auf $T(V)$ definieren, das diesen Vektorraum zu einer Algebra macht. Nach Definition gibt es für jedes $T, T' \in T(V)$ Zahlen $r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_k, r'_1, \ldots, r'_{k'}, s'_1, \ldots, s'_{k'}$ und Tensoren $T_1 \in T_{s_1}^{r_1}(V)$, …, $T_k \in T_{s_k}^{r_k}(V)$, $T'_1 \in T_{s'_1}^{r'_1}(V)$, …, $T'_{k'} \in T_{s'_{k'}}^{r'_{k'}}(V)$, sodass
$$T = \sum_{1 \le i \le k} T_i \quad \text{und} \quad T' = \sum_{1 \le j \le k'} T'_j.$$
Wir setzen
$$T \otimes T' := \sum_{ij} T_i \otimes T'_j.$$
Mit dieser Produktoperation versehen ist der Vektorraum $T(V)$ eine Algebra. Wir bemerken, dass das Produkt auf $T(V)$ nicht kommutativ ist.

Definition 5.1.25. Sei V ein Vektorraum. Die Algebra $T(V)$ heißt die *Tensoralgebra* von V. Die Unteralgebra
$$\bigoplus_{r \in \mathbb{N}_0} T_0^r(V)$$
der kontravarianten Tensoren von V wird mit $C(V)$ bezeichnet.

Bemerkung 5.1.26. In manchen Quellen wird die Algebra $C(V)$ die Tensoralgebra von V genannt und mit $T(V)$ bezeichnet.

In der folgenden Proposition reformulieren wir einige unserer vorherigen Resultate.

Proposition 5.1.27. *Seien U und V Vektorräume.*

- $\mathrm{M}_k(U;V) \cong \mathrm{L}(T_0^k(U);V)$.
- $\mathrm{M}_k(U) \cong (T_0^k(U))^*$.
- *Sei $f\colon U \to V$ eine lineare Abbildung und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau eine lineare Abbildung*
$$\bigotimes^k f\colon T_0^k(U) \to T_0^k(V),$$
die jeden Elementartensor $u_1 \otimes \cdots \otimes u_k$ auf $f(u_1) \otimes \cdots \otimes f(u_k)$ abbildet. Mithilfe der direkten Summe der Abbildungen $\bigotimes^k$ für alle k und der Identitätsabbildung $\mathrm{id}\colon T_0^0(U) = \mathbb{K} \to \mathbb{K} = T_0^0(V)$ *erhalten wir eine lineare Abbildung*
$$\bigotimes f\colon C(U) \to C(V).$$
Falls f ein Isomorphismus ist, sind die Abbildungen $\bigotimes^k f$ und $\bigotimes f$ ebenfalls Isomorphismen. Mithilfe der dualen Abbildung $f^*\colon V^* \to U^*$ erhalten wir so eine lineare Abbildung
$$\bigotimes^k f\colon T_k^0(V) = T_0^k(V^*) \to T_0^k(U^*) = T_k^0(U).$$

Bemerkung 5.1.28. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Mithilfe des kanonischen Isomorphismuses $\tau\colon V \cong (V^*)^*$ erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $(\bigotimes^r \mathrm{id}_{V^*}) \otimes (\bigotimes^s \tau)$:
$$T_s^r(V^*) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{(V^*)^* \otimes \cdots \otimes (V^*)^*}_{s\text{-mal}} \cong \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{s\text{-mal}}.$$
Im Folgenden werden wir so häufiger den Raum $T_s^r(V^*)$ mit
$$\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{s\text{-mal}}$$
identifizieren. Manchmal werden wir den kanonischen Isomorphismus
$$\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{s\text{-mal}} \cong T_r^s(V)$$
benutzen, um $T_s^r(V^*)$ mit $T_r^s(V)$ zu identifizieren.

Koordinatendarstellung von Tensoren

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $B_1 = \{e_1, \cdots, e_n\} \subset V$ eine Basis und $B^1 = \{e^1, \cdots, e^n\} \subset V^*$ die dazugehörige duale Basis. Aus Proposition 5.1.16 folgt, dass
$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}\}_{1 \le i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \le n}$$
eine Basis von $T_s^r(V)$ ist. Für jedes Element $T \in T_s^r(V)$ gibt es geeignete Zahlen $T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \in \mathbb{K}$, $1 \le i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \le n$, sodass
$$T = \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \le n} T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}. \qquad (*)$$

Sei $B_2 = \{f_1, \cdots, f_n\} \subset V$ eine weitere Basis und $B^2 = \{f^1, \cdots, f^n\} \subset V^*$ die dazugehörige duale Basis. Daraus erhalten wir die Basis

$$\{f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_s}\}_{1 \le i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \le n}$$

von $T^r_s(V)$. Es gibt Zahlen $(T')^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \in \mathbb{K}$, sodass

$$T = \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \le n} (T')^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_r} \otimes f^{j_1} \otimes \cdots \otimes f^{j_s}.$$

Andererseits existieren $A^j_i \in \mathbb{K}$, sodass $e_i = \sum_{1 \le j \le n} A^j_i f_j$. Mit anderen Worten ist A^j_i die ji-te Komponente der Basiswechselmatrix zwischen B_1 und B_2. Sei B^j_i die ji-te Komponente der Inversen dieser Matrix. Also gilt $f_i = \sum_{1 \le j \le n} B^j_i e_j$. Aus Lineare Algebra wissen wir, dass $e^i = \sum_{1 \le j \le n} B^i_j f^j$ und $f^i = \sum_{1 \le j \le n} = A^i_j e^j$. Wir benutzen diese Beziehungen, um die Zahlen $(T')^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_s}$ mithilfe der Zahlen $T^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_s}$ zu bestimmen. Durch Einsetzen der Gleichungen $e_i = \sum_{1 \le j \le n} A^j_i f_j$ und $e^i = \sum_{1 \le j \le n} B^i_j f^j$ in $(*)$ erhalten wir

$$(T')^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_s} = \sum_{1 \le k_1, \cdots, k_r, l_1, \cdots, l_s \le n} A^{i_1}_{k_1} \cdots A^{i_r}_{k_r} B^{l_1}_{j_1} \cdots B^{l_s}_{j_s} T^{k_1, \cdots k_r}_{l_1, \cdots, l_s}.$$

Beispiel 5.1.29. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Betrachte die kanonischen Isomorphismen $T^1_1(V) = V \otimes V^* \cong V^* \otimes V \cong \mathrm{L}(V; V)$, wobei der zweite Isomorphismus der aus Proposition 5.1.14 ist. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ eine Basis und $\{e^1, \ldots, e^n\} \subset V^*$ die duale Basis. Ein Tensor $T = \sum_{1 \le i, j \le n} T^i_j e_i \otimes e^j$ wird unter der Verkettung der obigen Isomorphismen auf die lineare Abbildung

$$L_T \colon v \mapsto \sum_{1 \le i, j \le n} T^i_j e^j(v) e_i$$

abgebildet. Die ij-te Komponente der darstellenden Matrix von L_T bezüglich der Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist T^i_j. Diese Beobachtung zeigt auch die folgenden Behauptung: Sei $A \in \mathrm{L}(V; V)$ eine lineare Abbildung und $T_A \in T^1_1(V)$ der Tensor, mit dem A unter dem obigen Isomorphismus identifiziert wird. Sei T^i_j die ij-te Komponenten der darstellenden Matrix von A bezüglich der Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann gilt $T_A = \sum_{1 \le i, j \le n} T^i_j e_i \otimes e^j$.

5.1.3 Die äußere Algebra

Sei V ein Vektorraum. Sei $I(V)$ das Ideal von $C(V)$, das durch Elemente der Form $v \otimes w + w \otimes v$ für $v, w \in V$ erzeugt wird. Konkreter: Für jedes Element T von $I(V)$ existieren $L_1, \ldots, L_k, R_1, \ldots, R_k \in C(V)$ und $v_1, w_1, \ldots, v_k, w_k \in V$, sodass

$$T = \sum_{i=1}^{k} L_i \otimes (v_i \otimes w_i + w_i \otimes v_i) \otimes R_i.$$

Der Quotient $\Lambda(V) = \frac{C(V)}{I(V)}$ ist dann auf natürliche Weise eine Algebra. Konkreter: Seien $[T]$ und $[T']$ Elemente von $\Lambda(V)$ mit Repräsentanten $T \in C(V)$ bzw. $T' \in C(V)$. Das Produkt von $[T]$ und $[T']$ ist die Klasse $[T \otimes T']$ von $T \otimes T'$ in $\Lambda(V)$. Wir bezeichnen das Produkt auf $\Lambda(V)$ mit $\wedge$ und heißt das *äußere Produkt* oder *Wedge-Produkt*. Es gilt also $[T] \wedge [T'] = [T \otimes T']$.

Definition 5.1.30. Sei V ein Vektorraum. Die Algebra $\Lambda(V)$ heißt die *äußere Algebra* von V.

Notation 5.1.31. Für einen Vektorraum V setzen wir $I^k(V) := T_0^k(V) \cap I(V)$ und $\Lambda^k(V) = \frac{T^k(V)}{I^k(V)}$.

Definition 5.1.32. Der Vektorraum $\Lambda^k(V)$ heißt die *k-te äußere Potenz* von V.

Die folgende Proposition folgt fast unmittelbar aus der Definition.

Proposition 5.1.33. *Sei V ein Vektorraum. Dann gilt*

(i) $I(V) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} I^k(V)$ *und*

(ii) $\Lambda(V) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Lambda^k(V)$

Bemerkung 5.1.34. Aus der obigen konkreten Beschreibung von $I(V)$ sehen wir, dass $I^0(V) = I^1(V) = \{0\}$. Daraus folgt $\Lambda^0(V) = \mathbb{K}$ und $\Lambda^1(V) = V$.

Bemerkung 5.1.35. Wir wissen, dass Elementartensoren, also Elemente der Form $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ für $v_1, \ldots, v_k \in V$, den Raum $T_0^k(V)$ erzeugen. Daraus folgt, dass Elemente der Form $[v_1 \otimes \cdots \otimes v_k] = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ den Raum $\Lambda^k(V)$ erzeugen. Ein Element $\omega \in \Lambda^k(V)$ heißt *zerlegbar* oder *faktorisierbar*, falls $v_1, \ldots, v_k \in V$ existieren, sodass $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$. Diese Bemerkung besagt, dass zerlegbare Elemente von $\Lambda^k(V)$, diesen Raum aufspannen.

Sei V ein Vektorraum und betrachte die folgenden Unterräume von $\Lambda(V)$:

$$\Lambda^{\text{even}}(V) := \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^{2k}(V), \qquad \Lambda^{\text{odd}}(V) := \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^{2k+1}(V).$$

Dann gilt $\Lambda(V) = \Lambda^{\text{even}}(V) \oplus \Lambda^{\text{odd}}(V)$. Sei $\omega \in \Lambda(V)$. Falls $\omega \in \Lambda^{\text{even}}(V)$ bzw. $\omega \in \Lambda^{\text{odd}}(V)$ setzen wir $|\omega| = 0$ bzw. $|\omega| = 1$.

Proposition 5.1.36. *Sei V ein Vektorraum und seien $\omega, \eta \in \Lambda(V)$ so, dass $|\omega|$ und $|\eta|$ definiert sind. Dann gilt $\omega \wedge \eta = (-1)^{|\omega||\eta|}\eta \wedge \omega$.*

Beweis. Seien $v, w \in V$. Dann gilt

$$v \wedge w = [v \otimes w] = [v \otimes w + w \otimes v - w \otimes v] = -[w \otimes v] = -w \wedge v,$$

wobei wir bei der vorletzten Gleichung benutzt haben, dass $v \otimes w + w \otimes v$ in $I(V)$ liegt.

Seien nun $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l \in V$. Wegen Bemerkung 5.1.35 reicht es, die Behauptung für $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ und $\eta = w_1 \wedge \cdots \wedge w_l$ zu zeigen. Es gilt

$$\omega \wedge \eta = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_l = (-1)^k w_1 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_l.$$

Wir können so weiter machen und jedes Mal ein w_i mit allen v_j permutieren. Dann erhalten wir

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} w_1 \wedge \cdots \wedge w_l \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega = (-1)^{|\omega||\eta|}\eta \wedge \omega. \qquad \square$$

Bemerkung 5.1.37. Sei V ein Vektorraum und sei $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ eine Basis. Dann ist $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}\}_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n}$ eine Basis von $T_0^k(V)$. Daraus folgt, dass $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1\leq i_1,\ldots,i_k}$ den Raum aufspannt. Wegen Proposition 5.1.36 gilt

$$\operatorname{Span}\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq n} = \operatorname{Span}\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}.$$

Die Familie $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}$ ist zusätzlich linear unabhängig und damit eine Basis von $\Lambda^k(V)$ (**Aufgabe**).

Aufgabe 5.1.38. Lösen Sie die Aufgabe in Bemerkung 5.1.37.

Aufgabe 5.1.39.

(i) (Bonusaufgabe +2 Punkte) Seien V einen Vektorraum mit $\dim V > 1$. Zeigen Sie, dass nicht jedes Element von $V \otimes V$ ein Elementartensor ist.

(ii) Sei W ein Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jedes Element von $\Lambda^k(W)$ zerlegbar ist, falls $\dim W < 4$. Widerlegen Sie die Aussage, falls $\dim W > 4$.

(iii) Sei X ein Vektorraum. Gilt $\omega \wedge \omega = 0$ für alle $\omega \in \Lambda(X)$.

Seien V und W Vektorräume. Wir haben schon gesehen, dass für jede multilineare Abbildung $\alpha \in \mathrm{M}_k(V;W)$ genau eine lineare Abbildung $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{L}(T_0^k(V);W)$ mit $\alpha = \widetilde{\alpha} \circ \otimes$ existiert. Wir werden jetzt sehen, dass der Vektorraum $\Lambda^k(V)$ eine ähnlich Eigenschaft hat. Mit etwas Notationsmissbrauch bezeichnen wir mit $\wedge$ die Verkettung

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-mal}} \xrightarrow{\otimes} T_0^k(V) \to \Lambda^k(V),$$

wobei die zweite Abbildung, die kanonische Projektionsabbildung ist. In der folgenden Definition bezeichnen wir mit S_k die Permutationsgruppe der Menge $\{1, \dots, k\}$.

Definition 5.1.40. Seien V und W Vektorräume. Eine multilineare Abbildung $\alpha \in \mathrm{M}_k(V;W)$ heißt *alternierend*, falls für jede Transposition $\tau \in S_k$ und für alle $v_1, \dots, v_k$

$$\alpha(v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(k)}) = -\alpha(v_1, \cdots, v_k).$$

Der Raum der alternierenden Abbildungen bezeichnen wir mit $\mathrm{AM}_k(V;W)$. Falls $W = \mathbb{K}$, schreiben wir $\mathrm{AM}_k(V)$ statt $\mathrm{AM}_k(V;\mathbb{K})$. Weiterhin setzen wir $\mathrm{AM}_0(V) := \mathbb{K}$ und $\mathrm{AM}(V) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} \mathrm{AM}_k(V)$.

Bemerkung 5.1.41. Da jede Permutation $\sigma \in S_k$ ein Produkt von Transpositionen ist, gilt

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \cdots, v_k),$$

wobei wir mit $\mathrm{sgn}(\sigma)$ die Parität der Permutation σ bezeichnet haben.

Proposition 5.1.42. *Seien V und W Vektorräume. Sei $\alpha \in \mathrm{AM}_k(V;W)$. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\widetilde{\alpha}\colon \Lambda^k(V) \to W$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k(V) \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}"] & \\ V \times \cdots \times V \arrow[u, "\wedge"] \arrow[r, "\alpha"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Die universelle Eigenschaft von $T_0^k(V)$ impliziert die Existenz einer eindeutigen linearen Abbildung $\widehat{\alpha}\colon T_0^k(V) \to W$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_0^k(V) \arrow[dr, "\widehat{\alpha}"] & \\ V \times \cdots \times V \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "\alpha"] & W \end{tikzcd} \qquad (*)$$

kommutiert. Wir zeigen jetzt, dass $I^k(V) \subset \ker \widehat{\alpha}$. In der Tat: Jedes Element aus $I^k(V)$ ist eine endliche Linearkombination von Elementen der Form

$$v_1 \otimes \cdots v_{i_1} \otimes v \otimes w \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_{i_2} + v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i_1} \otimes w \otimes v \otimes v'_1 \otimes \cdots v'_{i_2},$$

mit $i_1 + i_2 = k-2$ und $v_j, v'_k \in V$ für $1 \leq j \leq i_1$ und $1 \leq k \leq i_2$. Nach Definition von $\widehat{\alpha}$ gilt

$$\widehat{\alpha}(v_1 \otimes \cdots v_{i_1} \otimes v \otimes w \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_{i_2} + v_1 \otimes \cdots v_{i_1} \otimes w \otimes v \otimes v'_1 \otimes \cdots v'_{i_2}) =$$
$$\alpha(v_1, \cdots, v_{i_1}, v, w, v'_1, \cdots, v'_{i_2}) + \alpha(v_1, \cdots, v_{i_1}, w, v, v'_1, \cdots, v'_{i_2}) = 0.$$

Daraus folgt $I^k(V) \subset \ker \widehat{\alpha}$. Damit existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\widetilde{\alpha}\colon \Lambda^k(V) = \frac{T_0^k(V)}{I^k(V)} \to W$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k(V) \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}"] & \\ T_0^k(V) \arrow[u] \arrow[r, "\widehat{\alpha}"] & W \end{tikzcd} \tag{\#}$$

kommutiert. Aus der Kommutativität von $*$ und $\#$ folgt die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k(V) \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}"] & \\ V \times \cdots \times V \arrow[u, "\wedge"] \arrow[r, "\alpha"] & W \end{tikzcd}.$$

Sei nun $\widetilde{\beta}\colon \Lambda^k(V) \to W$ eine weitere lineare Abbildung, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k(V) \arrow[dr, "\widetilde{\beta}"] & \\ V \times \cdots \times V \arrow[u, "\wedge"] \arrow[r, "\alpha"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei $\widehat{\beta}$ die Verkettung

$$T_0^k(V) \to \Lambda^k(V) \xrightarrow{\widetilde{\beta}} W,$$

wobei die erste Abbildung die kanonische Projektionsabbildung ist. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} T_0^k(V) \arrow[dr, "\widehat{\beta}"] & \\ V \times \cdots \times V \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "\alpha"] & W \end{tikzcd}.$$

Daraus folgt $\widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$ und damit $\widetilde{\beta} = \widetilde{\alpha}$. Die Behauptung folgt. □

Als eine unmittelbare Folgerung von Proposition 5.1.42 erhalten wir das folgende

Korollar 5.1.43. Seien V und W Vektorräume. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$\mathrm{L}(\Lambda^k(V); W) \to \mathrm{AM}_k(V; W),$$

der $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{L}(\Lambda^k(V); W)$ auf die alternierende multilineare Abbildung $\alpha := \widetilde{\alpha} \circ \wedge$ abbildet. Explizit gilt für $v_1, \ldots, v_k \in V$:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \widetilde{\alpha}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k).$$

Beispiel 5.1.44. Falls $W = \mathbb{K}$ in der Situation von Korollar 5.1.43 gilt, erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $\Lambda^k(V)^* \cong \mathrm{AM}_k(V)$.

Mithilfe von Proposition 5.1.42 erhalten wir die folgende

Proposition 5.1.45. *Seien U und V Vektorräume und sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\bigwedge^k f : \Lambda^k(U) \to \Lambda^k(V)$, die $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ für $u_1, \ldots, u_k \in U$ auf $A(u_1) \wedge \cdots \wedge A(u_k)$ abbildet. Falls W ein weiterer Vektorraum und $g : V \to W$ eine weitere lineare Abbildung ist, gilt $\bigwedge^k(g \circ f) = \bigwedge^k(g) \circ \bigwedge^k(f)$.*

Beweis. Diese Aussage kann analog zu Proposition 5.1.7 und Proposition 5.1.9 bewiesen werden. □

Aufgabe 5.1.46. Sei V ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$ mit Charakteristik 0 und sei S_k die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \ldots, k\}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $\sigma \in S_k$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $f_\sigma : T_0^k(V) \to T_0^k(V)$ die auf Elementartensoren durch

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

gegeben ist. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\widetilde{\Lambda}^k(V) := \{T \in T_0^k(V) \quad | \quad f_\sigma(T) = \mathrm{sgn}(\sigma)T, \quad \forall \sigma \in S_k\}.$$

und setzen $A_k := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) f_\sigma : T_0^k(V) \to T_0^k(V)$. Weiterhin setzen wir $\widetilde{\Lambda}^0(V) := \mathbb{K}$ und $A_0 := \mathrm{id}_{\widetilde{\Lambda}^0(V)}$.

1. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $A_k^2 = A_k$ und dass $\mathrm{im}(A_k) = \widetilde{\Lambda}^k(V)$.
2. Für $T \in \widetilde{\Lambda}^k(V)$ und $T' \in \widetilde{\Lambda}^l(V)$ setzen wir $T \widetilde{\wedge} T' = A_{k+l}(T \otimes T')$. Zeigen Sie, dass $T \widetilde{\wedge} T' = (-1)^{kl} T' \widetilde{\wedge} T$.
3. (Bonus +4 Punkte) Durch bilineare Erweiterung von $\widetilde{\wedge}$ erhält man ein Produkt auf $\widetilde{\Lambda}(V) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \widetilde{\Lambda}^k(V)$, mit dem $\widetilde{\Lambda}(V)$ zu einer Algebra wird. Finden Sie einen kanonischen Isomorphismus zwischen $\Lambda(V)$ und $\widetilde{\Lambda}(V)$.

Das folgende Beispiel ist sehr wichtig.

Beispiel 5.1.47 (Der Insertion-Operator)**.** Sei V ein Vektorraum und sei $k \in \mathbb{N}$ (insbesondere ist $k \geq 1$). Für $v \in V^*$ betrachte die alternierende multilineare Abbildung $(I_v)_k : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k\text{-mal}} \to \Lambda^{k-1}(V^*)$, die durch

$$(v_1^*, \ldots, v_k^*) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^{i+1} v_i^*(v) v_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{v_i^*} \wedge \cdots \wedge v_k^*$$

gegeben ist. Die Notation $\widehat{v_i^*}$ bedeutet, dass v_i^* im Wedge-Produkt ausgelassen wird; d. h. $v_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{v_i^*} \wedge \cdots \wedge v_k^* = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_{i-1}^* \wedge v_{i+1}^* \wedge \cdots \wedge v_k^*$. Es existiert eine eindeutige lineare Abbildung $(\iota_v)_k : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k(V) \arrow[dr, "(\iota_v)_k"] & \\ V \times \cdots \times V \arrow[u, "\wedge"] \arrow[r, "(I_v)_k"'] & \Lambda^{k-1}(V) \end{tikzcd}.$$

kommutiert. Wir können die so definierten Abbildungen $(\iota_v)_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ zusammensetzen, um eine lineare Abbildung

$$\iota_v\colon \Lambda(V^*) \to \Lambda(V^*)$$

zu definieren. ι_v ist die eindeutige lineare Abbildung, die auf $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{K}$ verschwindet und auf $\Lambda^k(V^*)$ mit $(\iota_v)_k$ übereinstimmt. Wir halten die folgende unmittelbare Folgerung der Definition von ι_v fest: Für $\omega, \eta \in \Lambda(V^*)$, sodass $|\omega|$ definiert ist, gilt

$$\iota_v(\omega \wedge \eta) = \iota_v(\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge \iota_v(\eta).$$

Aufgabe 5.1.48.

(i) Sei V ein Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_k \in V$. Zeigen Sie, dass $\{v_1 \ldots, v_k\}$ genau dann eine linear unabhängige Familie ist, wenn $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0$.

(ii) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Seien $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ und $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V$ Basen von V. Dann existieren A_i^j, sodass $e_i = \sum_j A_i^j f_j$. Sei M die Matrix, deren ij-te Komponente A_i^j ist. Zeigen Sie, dass

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = (\det M) f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$$

Aufgabe 5.1.49. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $A\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Da $\dim \Lambda^n(V) = 1$, existiert eine Zahl ($\in \mathbb{K}$), die wir mit $\widetilde{\det} A$ bezeichnen, sodass

$$\Lambda^n(A)(\omega) = \widetilde{\det} A \omega$$

für alle $\omega \in \Lambda^n(V)$. Sei M_A die darstellende Matrix von A bezüglich einer beliebigen Basis von V. Zeigen Sie, dass $\widetilde{\det} A = \det M_A$.

5.1.4 Nicht-ausgeartete Paarungen und Dualitätsisomorphismen

Definition 5.1.50. Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $(\cdot,\cdot)\colon V \times W \to \mathbb{K}$ heißt eine *Paarung* von V und W. Die Paarung $(\cdot,\cdot)$ heißt *nicht-ausgeartet*, falls für alle $v \neq 0$ in V ein $w \in W$ existiert, sodass $(v, w) \neq 0$, und für alle $w \neq 0$ in W ein $v \in V$ existiert, sodass $(v, w) \neq 0$.

Proposition 5.1.51. *Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume. Sei $(\cdot,\cdot)\colon V \times W \to \mathbb{K}$ eine nicht-ausgeartete Paarung. Dann sind die Abbildungen*

$$V \to W^* \qquad v \mapsto (w \mapsto (v, w))$$

und

$$W \to V^* \qquad w \mapsto (v \mapsto (v, w))$$

Isomorphismen.

Beweis. Da die Paarung nicht-ausgeartet ist, sind beide Abbildungen injektiv. Daraus folgt $\dim V = \dim W$. Die Gleichheit der Dimensionen und die Injektivität der Abbildungen implizieren, dass die Abbildungen Isomorphismen sind. □

Nun behandeln wir einige wichtige Beispiele.

Beispiel 5.1.52. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt (Skalarprodukt) (oder allgemeiner eine nicht-ausgeartete symmetrische bilineare Abbildung). Aus der positiven Definitheit von g folgt, dass g eine nicht-ausgeartete Paarung ist. Die Abbildung

$$g^\flat\colon V \to V^* \qquad v \mapsto (w \mapsto (v, w))$$

ist dann ein Isomorphismus. Wir bezeichnen die Inverse von $g^\flat$ durch $g^\sharp$. Ein inneres Produkt auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V erlaubt uns also V mit V^* zu identifizieren. Wir beschreiben nun $g^\flat$ und $g^\sharp$ in Koordinaten. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ eine Basis und sei $\{e^1, \ldots, e^n\} \subset V^*$ die dazugehörige duale Basis. Sei $g_{ij} \coloneqq g(e_i, e_j)$ die ij-te Komponente der Gram-Matrix von g. Sei $1 \leq i \leq n$. Die j-te Komponente von $g^\flat(e_i)$ in der Basis $\{e^1, \ldots, e^n\}$ ist gegeben durch

$$g^\flat(e_i)(e_j) = g(e_i, e_j) = g_{ij}.$$

Es gilt also

$$g^\flat(e_i) = \sum_j g_{ij} e^j.$$

Daraus folgt, dass für ein beliebiges $v \in V$ mit $v = \sum_i \xi^i e_i$

$$g^\flat(v) = g^\flat(\sum_i \xi^i e_i) = \sum_{i,j} g_{ij} \xi^i e^j$$

gilt. Wir bezeichnen mit g^{ij} die ij-te Komponente der Inversen der Gram-Matrix $(g_{ij})_{i,j}$. Dann gilt für beliebiges $v^* \in V^*$ mit $v^* = \sum_i \xi_i e^i$

$$g^\sharp(v^*) = g^\sharp(\sum_i \xi_i e^i) = \sum_{i,j} g^{ij} \xi_i e_j.$$

Beispiel 5.1.53. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann existiert eine eindeutige Paarung $T^r_s(V) \times T^r_s(V^*) \to \mathbb{K}$, die auf Elementartensoren durch

$$(v_1 \otimes \cdots v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots v_s^*, \hat{v}_1^* \otimes \cdots \otimes \hat{v}_r^* \otimes \hat{v}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_s) \mapsto$$
$$\hat{v}_1^*(v_1) \cdots \hat{v}_r^*(v_r) \cdots v_1^*(\hat{v}_1) \cdots v_s^*(\hat{v}_s)$$

gegeben ist. Die Existenz kann mithilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts bewiesen werden (**Aufgabe**). Wir zeigen, dass diese Paarung nicht-ausgeartet ist. Wir betrachten hier nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ eine Basis und $\{e^1, \ldots, e^n\} \subset V^*$. Sei

$$T = \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leq n} T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

ein beliebiges Element aus $T^r_s(V)$. Wir setzen $S^{j_1 \cdots j_s}_{i_1 \cdots i_r} \coloneqq T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$. Die Paarung von T mit

$$S = \sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leq n} S^{j_1 \cdots j_s}_{i_1 \cdots i_r} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_s}$$

ergibt

$$\sum_{1 \leq i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \leq n} (T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s})^2.$$

Falls $T \neq 0$, ist mindestens eine der Komponenten $T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$ ungleich Null. Damit ist die Paarung von S und T auch ungleich Null. Wegen Proposition 5.1.51 erhalten wir einen Isomorphismus $T^r_s(V^*) \cong T^r_s(V)^*$. Durch Verkettung von diesem Dualitätsisomorphismus mit dem Isomorphismus aus Bemerkung 5.1.28 erhalten wir den Isomorphismus $T^r_s(V^*) \cong T^s_r(V)$.

Beispiel 5.1.54. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Durch die Verkettung des Dualitätsisomorphismuses $T^0_r(V) = T^r_0(V^*) \coloneqq T^r_0(V)^*$ aus Beispiel 5.1.53 mit dem kanonischen Isomorphismus $T^r_0(V)^* \cong M_r(V)$ erhalten wir einen Isomorphismus $T^0_r(V) \coloneqq M_r(V)$, der uns erlaubt multilineare Abbildungen $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{K}$ mit Tensoren vom Typ $(0,r)$ zu identifizieren.

Spezialfall: Jede bilineare Abbildung $V \times V \to \mathbb{K}$ (z. B. ein inneres Produkt auf V) kann so mit einem Element von $T^0_2(V)$ identifiziert werden. Expliziter: Sei $\{e_1,\dots,e_n\} \subset V$ eine Basis von V und $\{e^1,\dots,e^n\} \subset V^*$ die dazugehörige duale Basis. Ein Tensor $T = \sum_{1\leq i,j\leq n} T_{ij} e^i \otimes e^j$ wird unter dem Dualitätsisomorphismus $T^0_2(V) \coloneqq T^2_0(V)^*$ auf das Funktional $\widetilde{\alpha}_T \in T^2_0(V)^*$ mit

$$\widetilde{\alpha}_T(v_1 \otimes v_2) = \sum_{1\leq i,j\leq n} T_{ij} e^i(v_1) e^j(v_2)$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ abgebildet. Andererseits ist der Isomorphismus $T^2_0(V)^* \coloneqq \mathrm{M}_2(V)$ durch die Präkomposition mit $\otimes\colon V \times V \to T^2_0(V)$ gegeben. Das Funktional $\widetilde{\alpha}_T$ wird also auf die bilineare Abbildung α_T abgebildet mit

$$\alpha_T(v_1, v_2) = \widetilde{\alpha}_T(v_1 \otimes v_2) = \sum_{1\leq i,j\leq n} T_{ij} e^i(v_1) e^j(v_2).$$

Wir bemerken, dass die ij-te Komponente der „Gram-Matrix“ der bilinearen Abbildung α_T bezüglich der Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ (d. h. $\alpha_T(e_i,e_j)$) genau T_{ij} ist. Umgekehrt sei $\alpha \in \mathrm{M}_2(V)$ eine bilineare Abbildung und sei T_{ij} die ij-te Komponente der Gram-Matrix von α bezüglich der Basis $\{e_1,\dots,e_n\}$. Dann wird α unter der Identifikation $T^0_2(V) \coloneqq M_2(V)$ mit dem Tensor $T_\alpha = \sum_{1\leq i,j\leq n} T_{ij} e^i \otimes e^j$ identifiziert. Sei W ein weiterer endlich-dimensionaler Vektorraum und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $f^*\colon W^* \to V^*$ die duale Abbildung zu f. Betrachte die Abbildung $\bigotimes^r f^*\colon T^0_r(W) \to T^0_r(V)$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\mathrm{M}_r(W) \to \mathrm{M}_r(V)$, die wir ebenfalls mit $\bigotimes^r f^*$ bezeichnen, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
T^0_r(W) & \xrightarrow{\bigotimes^r f^*} & T^0_r(V) \\
\big\downarrow{\cong} & & \big\downarrow{\cong} \\
\mathrm{M}_r(W) & \xrightarrow{\bigotimes^r f^*} & \mathrm{M}_r(V)
\end{array}$$

kommutiert. Für $\alpha \in \mathrm{M}_r(W)$ und $v_1,\dots,v_r \in V$ gilt

$$\bigotimes^r f^*(\alpha)(v_1,\cdots,v_r) = \alpha(fv_1,\cdots,fv_r)$$

(**Aufgabe**).

Beispiel 5.1.55. Wir verallgemeinern nun das Beispiel 5.1.54. Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume. Wir bezeichnen mit d den Dualitätsisomorphismus $T^0_r(V) \cong T^r_0(V)^*$ und mit f den kanonischen Isomorphismus $T^r_0(V)^* \otimes W \cong \mathrm{L}(T^r_0(V);W)$. Mithilfe der Verkettung der Isomorphismen

$$T^0_r(V) \otimes W \xrightarrow{d\otimes \mathrm{id}_W} T^r_0(V)^* \otimes W \xrightarrow{f} \mathrm{L}(T^r_0(V);W) \cong \mathrm{M}_r(V;W),$$

wobei der letzte Isomorphismus der aus 5.1.27 ist, können wir $T^0_r(V) \otimes W$ mit $\mathrm{M}_r(V;W)$ identifizieren. Wir beschreiben nun diese Identifikation in Koordinaten. Seien $\{e_1,\dots,e_m\} \subset$

V und $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset W$ Basen und sei $\{e^1, \ldots, e^m\}$ die duale Basis zu $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Sei $T \in T_r^0(V) \otimes W$. Dann existieren $T^i_{j_1,\cdots,j_r} \in \mathbb{K}$, sodass

$$T = \sum_{i,j_1,\cdots,j_r} T^i_{j_1,\cdots,j_r} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_r} \otimes f_i.$$

T wird auf die lineare Abbildung abgebildet, die durch

$$(v_1, \ldots, v_r) \mapsto \sum_{i,j_1,\cdots,j_r} T^i_{j_1,\cdots,j_r} e^{j_1}(v_1) \cdots e^{j_r}(v_r) f_i$$

gegeben ist.

Beispiel 5.1.56. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann existiert genau eine Paarung $\Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V^*) \to \mathbb{K}$, die auf den zerlegbaren Elementen von $\Lambda^k(V)$ und $\Lambda^k(V^*)$ durch

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^*) \mapsto \det(v_i^*(v_j))$$

gegeben ist, und diese Paarung ist nicht-ausgeartet (**Aufgabe**). Wegen Proposition 5.1.51 erhalten wir einen Isomorphismus $\Lambda^k(V^*) \cong (\Lambda^k(V))^*$.

Beispiel 5.1.57. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Dualitätsisomorphismus $\Lambda^k(V^*) \cong \Lambda^k(V)^*$ aus Beispiel 5.1.56. Durch die Verkettung von Isomorphismen

$$\Lambda^k(V^*) \cong \Lambda^k(V)^* \cong \mathrm{AM}_k(V)$$

können wir den Raum $\Lambda^k(V^*)$ mit $\mathrm{AM}_k(V)$ identifizieren. Weiterhing bemerken wir, dass $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{K} = \mathrm{AM}_0(V)$. Durch Bildung der direkten Summe der Isomorphismen über alle k erhalten wir einen Isomorphismus $\Lambda(V^*) \cong \mathrm{AM}(V)$ (siehe Definition 5.1.40 für die Notation).

Bemerkung 5.1.58. Mithilfe des Isomorphismuses $\Lambda(V^*) \cong \mathrm{AM}(V)$ aus Beispiel 5.1.57 und des Wedge-Produkts auf $\Lambda(V^*)$ können wir auf $\mathrm{AM}(V)$ ein Produkt definieren, sodass $\Lambda(V^*) \cong \mathrm{AM}(V)$ ein Algebren-Isomorphismus ist. Wir bezeichnen dieses Produkt auf $\mathrm{AM}(V)$ ebenfalls mit $\wedge$. Sei $\omega \in \mathrm{AM}_k(V)$ und $\eta \in \mathrm{AM}_l(V)$. Dann gilt

$$\omega \wedge \eta(v_1, \cdots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \text{ k,l Shuffle}} \mathrm{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Ein $\sigma \in S_{k+l}$ heißt ein k, l-*Shuffle*, falls $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ und $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)$ (**Aufgabe**).

Sei $v \in V$. Wir betrachten den Insertion-Operator $\iota_v \colon \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{k-1}(V^*)$ (vgl. Beispiel 5.1.47). Dann existiert genau eine Abbildung $\mathrm{AM}_k(V) \to \mathrm{AM}_{k-1}(V)$, die wir ebenfalls mit ι_v bezeichnen, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k(V^*) & \xrightarrow{\iota_v} & \Lambda^{k-1}(V^*) \\ \downarrow{\cong} & & \downarrow{\cong} \\ \mathrm{AM}_k(V) & \xrightarrow{\iota_v} & \mathrm{AM}_{k-1}(V) \end{array}$$

kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen die Dualitätsisomorphismen aus Beispiel 5.1.57 sind. Für $\omega \in \mathrm{AM}_k(V)$ und für alle $v_1, \ldots, v_{k-1} \in V$ gilt

$$\iota_v(\omega)(v_1, \cdots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \cdots, v_{k-1})$$

(**Aufgabe**).

Sei W ein weiterer endlich-dimensionaler Vektorraum und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $f^*\colon W^* \to V^*$ die duale Abbildung zu f. Betrachte die Abbildung $\Lambda^k f^*\colon \Lambda^k(W^*) \to \Lambda^k(V^*)$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\mathrm{AM}_k(W) \to \mathrm{AM}_k(V)$, die wir ebenfalls mit $\Lambda^k f^*$ bezeichnen, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k(W^*) \arrow[r, "\Lambda^k f^*"] \arrow[d, "\cong"] & \Lambda^k(V^*) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{AM}_k(W) \arrow[r, "\Lambda^k f^*"] & \mathrm{AM}_k(V) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Für $\omega \in \mathrm{AM}_k(W)$ und $v_1, \ldots, v_k \in V$ gilt

$$\Lambda^k f^*(\omega)(v_1, \cdots, v_k) = \omega(fv_1, \cdots, fv_k)$$

(**Aufgabe**).

5.1.5 Operationen auf Tensoren

Kontraktion

Sei V ein Vektorraum. Assoziiert zu einem Paar (k, l) mit $1 \le k \le r$ und $1 \le l \le s$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung

$$C\colon T^r_s(V) \to T^{r-1}_{s-1}(V),$$

die $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots v_s^*$ für $v_1, \ldots, v_r, v_1^*, \ldots, v_s^* \in V$ auf

$$v_l^*(v_k) v_1 \otimes \cdots \otimes v_{k-1} \otimes v_{k+1} \otimes \cdots v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_{l-1}^* \otimes v_{l+1}^* \otimes \cdots v_s^*$$

abbildet. Die Existenz und Eindeutigkeit von C mit der obigen Eigenschaft ist eine direkte Folgerung der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

Definition 5.1.59. Die oben definierte Abbildung C heißt *Kontraktion* oder präziser die (k, l)-*Kontraktion.*

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Sei $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset V$ eine Basis und $\{e^1, \cdots, e^n\} \subset V^*$ die dazugehörige duale Basis. Sei

$$T = \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \le n} T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}.$$

Nach Anwendung der (k, l)-Kontraktion auf T erhalten wir

$$\sum_{\substack{1 \le i_1, \cdots, i_{k-1}, i_{k+1}, \cdots, i_r, \\ j_1, \cdots, j_{l-1}, i_{l+1}, \cdots, j_s \le n}} \sum_m T^{i_1 \cdots i_{k-1} m i_{k+1}, \cdots, i_r}_{j_1 \cdots j_{l-1} m j_{l+1} \cdots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{k-1}} \otimes e_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}$$

$$\otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_{l-1}} \otimes e^{j_{l+1}} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}.$$

Beispiel 5.1.60. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Sei $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset V$ eine Basis und $\{e^1, \cdots, e^n\} \subset V^*$ die dazugehörige duale Basis. Betrachte die einzige mögliche Kontraktion auf $T^1_1(V)$. Ein Element $T = \sum_{ij} T^i_j e_i \otimes e^j$ wird auf $\sum_m T^m_m$ abgebildet. Wenn wir $T^1_1(V)$ mithilfe des kanonischen Isomorphismuses aus Proposition 5.1.14 mit $\mathrm{L}(V; V)$ identifizieren, dann ist diese Kontraktion nichts anderes als die Spur-Abbildung.

Erhöhung und Senkung von Indizes

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $g\colon V\times V \to \mathbb{R}$ eine nicht-ausgeartete symmetrische bilineare Abbildung. Die folgende Konstruktion ist für allgemeine nicht-ausgeartete symmetrische bilineare Abbildungen g möglich, wir werden uns aber später vor allem für innere Produkte interessieren. Für $1 \leq k \leq r$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$T^r_s(V) \to \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{(k-1)\text{-mal}} \otimes V^* \otimes \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{(r-k)\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s\text{-mal}} \to T^{r-1}_{s+1}(V),$$

wobei die erste Abbildung

$$\underbrace{\mathrm{id}_V\otimes\cdots\otimes \mathrm{id}_V}_{(k-1)\text{-mal}} \otimes g^\flat \otimes \underbrace{\mathrm{id}_V\otimes\cdots \mathrm{id}_V}_{(r-k)\text{-mal}} \otimes \underbrace{\mathrm{id}_{V^*}\otimes\cdots\otimes \mathrm{id}_{V^*}}_{s\text{-mal}}$$

ist und die zweite Abbildung, die eindeutige lineare Abbildung, die auf Elementartensoren durch

$$v_1\otimes\cdots\otimes v_{k-1}\otimes v^*\otimes v_{k+1}\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v_1^*\otimes\cdots\otimes v_s^* \mapsto v_1\otimes\cdots\otimes v_{k-1}\otimes v_{k+1}\otimes\cdots\otimes v_r$$
$$\otimes v_1^*\otimes\cdots\otimes v_s^*\otimes v^*$$

gegeben ist. Sei $\{e_1,\ldots,e_n\}\subset V$ eine Basis und $\{e^1,\ldots,e^n\}\subset V^*$ die dazugehörige duale Basis. Sei

$$T = \sum_{1\leq i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\leq n} T^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}.$$

Aus der Rechnung in Beispiel 5.1.52 folgt, dass T unter der obigen Abbildung auf

$$S = \sum_{\substack{1\leq i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_r,\\ j_1,\cdots,j_{l-1},j_{l+1},\cdots,j_s,l\leq n}} S^{i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s l} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{k-1}}\otimes e_{i_{k+1}}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\cdots\otimes e^{j_s}\otimes e^l,$$

mit

$$S^{i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s,l} = \sum_{1\leq i_k\leq n} g_{i_k l} T^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s}.$$

abgebildet wird.

Definition 5.1.61. Die oben definierte lineare Abbildung $T^r_s(V)\to T^{r-1}_{s+1}(V)$ heißt die *Senkung des k-ten Index.*

Für $1\leq k\leq s$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$T^r_s(V) \to \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{(k-1)\text{-mal}} \otimes V \otimes \underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{(s-k)\text{-mal}} \to T^{r+1}_{s-1}(V),$$

wobei die erste Abbildung

$$\underbrace{\mathrm{id}_V\otimes\cdots\otimes \mathrm{id}_V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{\mathrm{id}_{V^*}\otimes\cdots\otimes \mathrm{id}_{V^*}}_{(k-1)\text{-times}} \otimes g^\sharp \otimes \underbrace{\mathrm{id}_{V^*}\otimes\cdots\otimes \mathrm{id}_{V^*}}_{(s-k)\text{-mal}}$$

ist. Die zweite Abbildung ist die eindeutige lineare Abbildung, die auf Elementartensoren durch

$$v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v_1^*\otimes\cdots\otimes v_{k-1}^*\otimes v\otimes v_{k+1}^*\otimes\cdots v_s^* \mapsto v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v$$
$$\otimes v_1^*\otimes\cdots\otimes v_{k-1}^*\otimes v_{k+1}^*\otimes\cdots\otimes v_s^*$$

gegeben ist.

Definition 5.1.62. Die oben definierte lineare Abbildung $T^r_s(V) \to T^{r-1}_{s+1}(V)$ heißt die *Erhöhung des k-ten Index.*

Bemerkung 5.1.63. Die oben definierten Operatoren zu Erhöhung und Senkung von Indizes sind von der Wahl von g abhängig.

Aufgabe 5.1.64. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ eine Basis und $\{e^1, \ldots, e^n\} \subset V^*$ die dazugehörige duale Basis. Sei

$$T = \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \le n} T^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

ein beliebiges Element von $T^r_s(V)$. Berechnen Sie die Komponenten des Resultats der Erhöhung des k-ten Index von T.

5.1.6 Skalarprodukt auf der Tensor- und äußere Algebra

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und sei $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt (Skalarprodukt). Wir bezeichnen mit $g^\flat : V \to V^*$ und $g^\sharp : V^* \to V$ die musischen Isomorphismen, die in Beispiel 5.1.52 diskutiert wurden. Wir benutzen g um ein Skalarprodukt auf $\Lambda^k(V)$ und $\Lambda^k(V^*)$ zu definieren. Der Isomorphismus $g^\flat$ induziert einen Isomorphismus $\Lambda^k g^\flat \colon \Lambda^k(V) \xrightarrow{\cong} \Lambda^k(V^*)$, den wir im Folgenden wieder mit $g^\flat$ bezeichnen. Betrachte die Verkettung

$$g^{\Lambda^k(V)} : \Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V) \xrightarrow{\mathrm{id}_{\Lambda^k(V)} \times g^\flat} \Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V^*) \to \mathbb{R},$$

wobei die zweite Abbildung die in Beispiel 5.1.56 definierte Paarung ist. Für zerlegbare Elemente $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ und $w_1 \wedge \cdots \wedge w_k$ gilt

$$g^{\Lambda^k(V)}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge \cdots \wedge w_k) = \det(g(w_i, v_j))_{i,j}.$$

Mithilfe dieser Beobachtung sieht man, dass $g^{\Lambda^k(V)}$ symmetrisch ist. Zusätzlich folgt aus dieser Beobachtung, dass $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ eine Orthonormalbasis von $\Lambda^k(V)$ ist, falls $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V ist. Andererseits induziert der Isomorphismus $g^\sharp$ einen Isomorphismus $\Lambda^k g^\sharp \colon \Lambda^k(V^*) \xrightarrow{\cong} \Lambda^k(V)$, den wir im Folgenden wieder mit $g^\sharp$ bezeichnen. Betrachte die Verkettung

$$g^{\Lambda^k(V^*)} : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V^*) \xrightarrow{g^\sharp \times \mathrm{id}_{\Lambda^k(V)}} \Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V^*) \to \mathbb{R},$$

wobei die zweite Abbildung die in Beispiel 5.1.56 definierte Paarung ist. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ eine Orthonormalbasis und $\{e^1, \ldots, e^n\} \subset V^*$ die dazugehörige duale Basis. Wir bemerken, dass $g^\flat(e_i) = e^i$. Daraus folgt, dass $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{1 \le i_1 < \ldots, i_k \le n}$ und $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}\}_{1 \le i_1 < \ldots, i_k \le n}$ Orthonormalbasen von $\Lambda^k(V)$ und $\Lambda^k(V^*)$ sind, wenn diese Räume mit dem Skalarprodukt $g^{\Lambda^k(V)}$ bzw. $g^{\Lambda^k(V^*)}$ versehen werden. Im Folgenden werden wir, falls es nicht zur Verwirrung führt, statt $g^{\Lambda^k(V)}$ und $g^{\Lambda^k(V^*)}$ einfach g schreiben. Jetzt definieren wir ein Skalarprodukt auf $T^r_S(V)$ mithilfe von g. Wir bezeichnen mit G den Isomorphismus

$$(\bigotimes^r g^\flat) \otimes (\bigotimes^s g^\sharp) \colon T^r_s(V) \to T^r_s(V^*).$$

Die Verkettung

$$T^r_s(V) \times T^r_s(V) \xrightarrow{\mathrm{id}_{T^r_S(V)} \otimes G} T^r_s(V) \times T^r_s(V^*) \to \mathbb{R},$$

wobei die zweite Abbildung die in Beispiel 5.1.53 definierte Paarung ist, ist ein Skalarprodukt auf $T^r_s(V)$.

5.2 Tensorbündeln und Tensorfelder

Sei $(M, \mathcal{F})$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir setzen

$$T^r_s(M) = \bigsqcup_{p \in M} T^r_s(T_pM)$$

Betrachte die „Projektionsabbildungen"

$$\pi_{T^r_s(M)} \colon T^r_s(M) \to M \qquad T^r_s(T_pM) \ni T \mapsto p.$$

Im Folgenden setzen wir zunächst voraus, dass r und s nicht gleichzeitig 0 sind. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Mithilfe der Basis

$$\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_p \otimes \mathrm{d}x^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}|_p\}_{1 \le i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \le n},$$

können wir den Vektorraum $T^r_s(T_pM)$ für jedes $p \in U$ mit $\mathbb{R}^{n^{r+s}}$ identifizieren. Konkreter: Sei $\{e_1, \dots, e_{n^{r+s}}\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{n^{r+s}}$. Wir fixieren eine von $p \in U$ unabhängige Bijektion

$$b \colon \{(i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s) | 1 \le i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s \le n\} \to \{1, \dots, n^{r+s}\}$$

und benutzen den eindeutigen Isomorphismus $T^r_s(T_pM) \cong \mathbb{R}^{n^{r+s}}$, der

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_p \otimes \mathrm{d}x^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}|_p$$

auf $e_{b(i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s)}$ abbildet. Wir benutzen diese Isomorphismen für jedes $p \in U$, um eine Bijektion

$$\widetilde{\varphi} \colon \pi^{-1}_{T^r_s(M)}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n^{r+s}} \subset \mathbb{R}^{n + n^{r+s}}$$

zu konstruieren. Mithilfe solcher Bijektionen und des Ergebnisses von Aufgabe 1.1.40 können wir eine Topologie auf $T^r_s(M)$ einführen: Die Familie

$$\mathcal{B}_{T^r_s(M)} \coloneqq \{\widetilde{\varphi}^{-1}(V) | (U, \varphi) \in \mathcal{F}, V \subset \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n^{r+s}} \text{ ist offen}\}$$

von Teilmengen von $T^r_s(M)$ erfüllt die Voraussetzungen aus Aufgabe 1.1.40 und ist damit die Basis einer eindeutigen Topologie auf $T^r_s(M)$, mit der wir $T^r_s(M)$ versehen. Die Bijektionen $\widetilde{\varphi}$ sind dann tautologischerweise Homöomorphismen. Der Raum $T^r_s(M)$ ist also ein lokal euklidischer Raum der Dimension $n + n^{r+s}$. Er ist darüber hinaus Hausdorff und zweitabzählbar. $T^r_s(M)$ ist also eine $(n+n^{r+s})$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Die Familie

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = \{(\pi^{-1}_{T^r_s(M)}(U), \widetilde{\varphi}) | (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$$

ist ein Atlas. Um das einzusehen, kann man Proposition 3.1.24, Proposition 3.1.28 und das oben hergeleitete Verhalten von Tensoren vom Typ (r, s) unter Koordinatenwechsel benutzen.

Für $r = s = 0$ gilt $T^0_0(M) = \bigsqcup_{p \in M} \mathbb{R}$. Wir können diesen Raum kanonisch mit dem Raum $M \times \mathbb{R}$ identifizieren, der als Produkt der Mannigfaltigkeiten M und $\mathbb{R}$ eine Mannigfaltigkeit ist. Bis auf diese Identifikation ist die Abbildung $\pi_{T^0_0(M)}$ durch $(p, x) \mapsto p$ gegeben.

Definition 5.2.1. $T^r_s(M)$ mit der oben konstruierten Mannigfaltigkeitsstruktur heißt das Tensorbündel vom Typ (r, s) der Mannigfaltigkeit M.

Proposition 5.2.2. *Die Projektionsabbildung $\pi_{T^r_s(M)}\colon T^r_s(M) \to M$ ist glatt.*

Beispiel 5.2.3. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann sind $T^1_0(M)$ und $T^0_1(M)$ nichts anderes als das Tangentialbündel bzw. Kotangentialbündel von M.

Definition 5.2.4. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein (glattes) *Tensorfeld vom Typ* (r,s) auf M ist eine glatte Abbildung $T\colon M \to T^r_s(M)$ mit der Eigenschaft, dass $\pi_{T^r_s(M)} \circ T = \mathrm{id}_M$. Der Raum aller glatten Tensorfelder vom Typ (r,s) auf M wird mit $\mathcal{T}^r_s(M)$ oder $\Gamma(T^r_S(M))$ bezeichnet.

Beispiel 5.2.5. Tensorfelder vom Typ $(1,0)$ und Tensorfelder vom Typ $(0,1)$ sind nichts anderes als Vektorfelder bzw. Kovektorfelder.

Beispiel 5.2.6. Sei M eine Mannigfaltigkeit und (U,φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1,\dots,x^n\}$. Sei $(T^r_s(U) = \pi^{-1}_{T^r_s(M)}(U), \widetilde{\varphi})$ eine induzierte Karte, die wie oben von einer Bijektion

$$b\colon \{(i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s) | 1 \le i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s \le n\} \to \{1,\dots,n^{r+s}\}$$

abhängt. Die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s} : p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_p \otimes \mathrm{d}x^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}|_p$$

ist ein Tensorfeld vom Typ (r,s) auf U, da $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}(p)$ für alle $p \in U$ in $T^r_s(T_pM)$ liegt und

$$\widetilde{\varphi} \circ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s} \circ \varphi^{-1}(x) = (x, e_{b(i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s)})$$

und damit glatt ist.

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $T\colon M \to T^r_s(M)$ eine nicht notwendigerweise glatte Abbildung mit $\pi_{T^r_s(M)} \circ T = \mathrm{id}_M$. Sei (U,φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1,\dots,x^n\}$. Für jedes $p \in U$ finden wir $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p) \in \mathbb{R}$, sodass

$$T(p) = \sum_i T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}|_p \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}|_p \otimes \mathrm{d}x^{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}|_p.$$

So erhalten wir n^{r+s} Funktionen

$$T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\colon U \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p),$$

die wir die *Komponentenfunktionen* von T in der Karte (U,φ) nennen. Der Beweis der folgenden Proposition ist analog zum Beweis von Proposition 3.4.3.

Proposition 5.2.7. *Seien M, T wie oben. Die Abbildung T ist genau dann ein glattes Vektorfeld, wenn ihre Komponentenfunktionen $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$ in allen Karten glatt sind.*

Bemerkung 5.2.8. Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei $f \in C^\infty(M)$. Wir definieren $T_1 + T_2, \lambda T_1$ und $fT_1 \in \mathcal{T}^r_s(M)$ punktweise:

$$(T_1 + T_2)(p) = T_1(p) + T_2(p),$$
$$(\lambda T_1)(p) = \lambda T_1(p),$$
$$(fT_1)(p) = f(p)T_1(p).$$

Versehen mit diesen Operationen ist $\mathcal{T}^r_s(M)$ ein $C^\infty(M)$-Modul.

Definition 5.2.9. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$ und $T' \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}$. Wir definieren $T \otimes T' \in \mathcal{T}^{r+r'}_{s+s'}$ mit

$$(T \otimes T')(p) = T(p) \otimes T'(p).$$

(**Aufgabe**:Warum ist $T \otimes T'$ glatt?)

Tensorfelder vom Typ $(0, r)$

Tensorfelder, die für uns eine wichtigere Rolle spielen, sind Tensorfelder vom Typ $(0, r)$. In diesem Abschnitt studieren wir daher speziell solche Tensorfelder. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei $T\colon M \to T^0_r(M)$ eine nicht notwendigerweise glatte Abbildung mit $\pi_{T^0_r(M)} \circ T = \mathrm{id}_M$. Für jedes $p \in M$ benutzen wir den Dualitätsisomorphismus $T^0_r(T_pM) \cong \mathrm{M}_r(T_pM)$ aus Beispiel 5.1.54, um $T_p \coloneqq T(p) \in T^0_r(T_pM)$ als eine multilineare Abbildung

$$\underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

zu interpretieren. Für r Vektorfelder $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir die Funktion

$$T(X_1, \dots, X_r)\colon M \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto T_p((X_1)_p, \dots, (X_r)_p).$$

Proposition 5.2.10. *Seien M und T wie oben. T ist genau dann ein glattes Tensorfeld vom Typ $(0, r)$, wenn die Abbildung $T(X_1, \dots, X_r)$ für je r beliebige Vektorfelder $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ glatt ist.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Proposition 3.4.35. Sei T glatt. Seien $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$. Wir zeigen, dass $T(X_1, \dots, X_r)$ eingeschränkt auf den Definitionsbereich jeder Karte von M glatt ist. Sei (U, φ) eine Karte mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Seien $\{T_{i_1 \dots i_r}\}$ und $\{X^i_j\}$ die Komponentenfunktionen von T und X_j in der Karte (U, φ). Dann gilt

$$T(X_1, \dots, X_r)|_U = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_r \le n} T_{i_1 \dots i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_s}(X_1, \dots, X_r) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_r \le n} T_{i_1 \dots i_r} X^{i_1}_1 \dots X^{i_r}_r.$$

Daraus folgt, dass $T(X_1, \dots, X_r)|_U$ glatt ist.

Sei nun umgekehrt T so, dass $T(X_1, \dots, X_r)$ für alle $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ glatt ist. Sei (U, φ) eine Karte auf M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$ und $p \in U$. Wir bezeichnen mit $T_{i_1 \dots i_r}$, die Komponentenfunktionen von T in dieser Karte. Wähle für jedes $(k_1, \dots, k_r)$ Vektorfelder $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}}, \dots, \widetilde{\frac{\partial}{\partial x^{k_r}}}$, die in einer offenen Umgebung V von p mit $\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{k_r}}$ übereinstimmen. Es gilt

$$T(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}}, \dots, \widetilde{\frac{\partial}{\partial x^{k_r}}})|_V = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_r \le n} T_{i_1 \dots i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_s}(\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{k_r}}) = T_{k_1 \dots k_r}$$

Die Funktion $T_{k_1 \dots k_r}$ ist damit glatt. Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 5.2.11. Wegen Proposition 5.2.10 induziert jede $(0, r)$-Tensorfeld T eine multilineare Abbildung

$$L_T\colon \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-mal}} \to C^\infty(M) \qquad (X_1, \dots, X_r) \mapsto T(X_1, \dots, X_r).$$

Die Abbildung L_T ist im folgenden Sinne $C^\infty(M)$-*multilinear*:

$$L_T(X_1, \dots, X_i, fX + gY, X_{i+1}, \dots, X_{r-1}) = fL_T(X_1, \dots, X_i, X, X_{i+1}, \dots, X_{r-1}) +$$
$$gL_T(X_1, \dots, X_i, Y, X_{i+1}, \dots, X_{r-1})$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$, $X_1, \dots, X_{r-1}, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $i \in \{0, \dots, r-1\}$.

Der Beweis der folgenden Proposition ist analog zum Beweis von Proposition 3.4.35

Proposition 5.2.12. *Sei*

$$L\colon \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-mal}} \to C^\infty(M) \qquad (X_1, \ldots, X_r) \mapsto T(X_1, \ldots, X_r)$$

eine $C^\infty(M)$ multilineare Abbildung. Dann existiert genau ein $(0,r)$-Tensorfeld T mit $L = L_T$. Wir benutzen hier die Notation aus Bemerkung 5.2.11.

Notation 5.2.13. Im Folgenden bezeichnen wir die durch ein $(0,r)$-Tensorfeld induzierte $C^\infty(M)$-multilineare Abbildung T ebenfalls mit T statt L_T.

Beispiel 5.2.14 (Riemannsche Metrik)**.** Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei $g \coloneqq \mathcal{T}_2^0(M)$. Für jedes $p \in M$ können wir $g_p \coloneqq g(p)$ mithilfe des Isomorphismuses $T_2^0(T_pM) \cong M_2(T_pM)$ als eine bilineare Abbildung $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ interpretieren. Das $(0,2)$-Tensorfeld g heißt eine (glatte) *Riemannsche Metrik*, falls g_p für jedes p ein inneres Produkt (Skalarprodukt) auf T_pM ist. Mithilfe einer Riemannschen Metrik kann man die Länge von Tangentialvektoren und Winkel zwischen ihnen definieren. Mithilfe eines Längenbegriffs für Tangentialvektoren kann man wiederum die Länge von Kurven auf der Mannigfaltigkeit definieren und die Mannigfaltigkeit zu einem metrischen Raum machen. Riemannsche Metriken induzieren weiterhin Maße auf Mannigfaltigkeiten und erlauben uns über Volumen von Teilmengen einer Mannigfaltigkeit zu reden. Ein Paar (M,g), wobei M eine Mannigfaltigkeit und g eine Riemannsche Metrik auf M ist, heißt eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*. In der Riemannschen Geometrie beschäftigt man sich mit der Untersuchung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Pull-Back von $(0,r)$-Tensorfeldern

Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $r \in \mathbb{N}$. Sei $T \in \mathcal{T}_r^0(N)$. Betrachte die Abbildung

$$F^*(T)\colon M \to T_r^0(M) \qquad p \mapsto \bigotimes^r F^*_{F(p)}(T_{F(p)}).$$

Dann gilt $F^*(T)(p) \in T_r^0(T_pM)$. Wir zeigen nun die Glattheit von $F^*(T)$. Sei $p \in M$ und sei (V,ψ) eine Karte um $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{y^1, \ldots, y^n\}$. Seien $T_{i_1 \ldots i_r}$ die Komponentenfunktionen von T in der Karte (V,ψ). Es gilt also

$$T|_V = \sum T_{i_1 \ldots i_r} \mathrm{d}y^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}y^{i_r}.$$

Daher gilt

$$F^*(T)|_{F^{-1}(V)} = \sum (T_{i_1\ldots i_r} \circ F)(F^*(\mathrm{d}y^{i_1}) \otimes \cdots \otimes F^*(\mathrm{d}y^{i_r}) = \sum (T_{i_1 \ldots i_r} \circ F)\mathrm{d}(y^{i_1} \circ F) \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}(y^{i_r} \circ F),$$

wobei wir Proposition 3.4.37 benutzt haben. Daraus folgt, dass $F^*(T)|_{F^{-1}(V)}$ glatt ist (vgl. Definition 5.2.9). Wir haben gezeigt, dass für jedes p eine offene Umgebung U von p existiert, sodass $F^*(T)|_U$ glatt ist. Daraus folgt die Glattheit von $F^*(T)$.

Definition 5.2.15. Seien M, N, F und T wie oben. $F^*(T)$ heißt das Pull-Back von T entlang F.

Wir erhalten für jedes $r \in \mathbb{N}$ eine lineare Abbildung

$$F^*\colon \mathcal{T}_r^0(N) \to \mathcal{T}_r^0(M) \qquad T \mapsto F^*(T).$$

Sei $T \in \mathcal{T}_r^0(N)$. Wir betrachten T und $F^*(T)$ als multilineare Abbildungen wie oben. Dann gilt für $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$

$$F^*(T)(X_1, \ldots, X_r)(p) = T_{F(p)}((F_*)p((X_1)_p), \ldots, (F_*)p((X_r)_p)).$$

5.3 Das äußere Bündel und Differentialformen

Sei $(M, \mathcal{F})$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir setzen

$$\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M)$$

Betrachte die „Projektionsabbildungen“

$$\pi_{\Lambda^k(T^*M)} \colon \Lambda^k(T^*M) \to M \qquad \Lambda^k(T_p^*M) \ni T \mapsto p.$$

Im Folgenden setzen wir zunächst $k \neq 0$ voraus. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Für jedes $p \in U$ können wir den Vektorraum $\Lambda^k(T_p^*M)$ mithilfe der Basis

$$\{\mathrm{d}x^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}|_p\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n},$$

mit $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ identifizieren. Konkreter: Sei $\{e_1, \ldots, e_{\binom{n}{k}}\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$. Wir fixieren eine von $p \in U$ unabhängige Bijektion

$$b \colon \{(i_1, \ldots, i_r) | 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\} \to \{1, \ldots, \binom{n}{k}\}$$

und benutzen den eindeutigen Isomorphismus $\Lambda^k(T_p^*M) \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$, der

$$\mathrm{d}x^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_s}|_p$$

auf $e_{b(i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s)}$ abbildet. Wir benutzen diese Isomorphismen für jedes $p \in U$, um eine Bijektion

$$\widetilde{\varphi} \colon \pi^{-1}_{\Lambda^k(T^*M)}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \subset \mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}}$$

zu konstruieren. Mithilfe solcher Bijektionen und des Ergebnisses von Aufgabe 1.1.40 können wir eine Topologie auf $\Lambda^k(T^*M)$ einführen: Die Familie

$$\mathcal{B}_{\Lambda^k(T^*M)} := \{\widetilde{\varphi}^{-1}(V) | (U, \varphi) \in \mathcal{F}, V \subset \varphi(U) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \text{ ist offen}\}$$

von Teilmengen von $\Lambda^k(T^*M)$ erfüllt die Voraussetzungen aus Aufgabe 1.1.40 und ist damit die Basis einer eindeutigen Topologie auf $\Lambda^k(T^*M)$, mit der wir $\Lambda^k(T^*M)$ versehen. Die Bijektionen $\widetilde{\varphi}$ sind dann tautologischerweise Homöomorphismen. Der Raum $\Lambda^k(T^*M)$ ist also ein lokal euklidischer Raum der Dimension $n + \binom{n}{k}$. Er ist darüber hinaus Hausdorff und zweitabzählbar. $\Lambda^k(T^*M)$ ist also eine $(n + \binom{n}{k})$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Die Familie

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = \{(\pi^{-1}_{\Lambda^k(T^*M)}(U), \widetilde{\varphi}) | (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$$

ist ein Atlas. Ähnlich können wir eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf

$$\Lambda(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda(T_p^*M)$$

definieren, die sie zu einer $(n + 2^n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit macht. Für $k = 0$ gilt $\Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \mathbb{R}$. Wir können diesen Raum kanonisch mit dem Raum $M \times \mathbb{R}$ identifizieren, der als Produkt der Mannigfaltigkeiten M und $\mathbb{R}$ auf natürliche Weise eine Mannigfaltigkeit ist. Bis auf dieser Identifikation ist die Abbildung $\pi_{\Lambda^k(T^*M)}$ durch $(p, x) \mapsto p$ gegeben.

Definition 5.3.1. Versehen mit der oben konstruierten Mannigfaltigkeitsstruktur heißen $\Lambda^k(T^*M)$ und $\Lambda(T^*M)$ das äußere k-Bündel bzw. das äußere bündel von M.

Proposition 5.3.2. *Die Projektionsabbildung* $\pi_{\Lambda^k(T^*M)}\colon \Lambda^k(T^*M) \to M$ *ist glatt.*

Beispiel 5.3.3. Sei M eine Mannigfaltigkeit. $\Lambda^1(T^*M)$ ist nichts anderes als das Kotangentialbündel von M.

Definition 5.3.4. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine (glatte) *Differentialform vom Grad* k oder k*-Form* auf M ist eine glatte Abbildung $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ mit der Eigenschaft, dass $\pi_{\Lambda^k(T^*M)} \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Der Raum aller k-Formen auf M wird mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet. Weiterhin setzen wir $\Omega(M) \coloneqq \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} \Omega^k(M)$.

Beispiel 5.3.5. 0-Formen können mit glatten Funktionen auf M identifiziert werden: Für jedes 0-Form ω gibt es eine eindeutige glatte Funktion f_ω, sodass $\omega_p = (p, f_\omega(p))$ gilt. Umgekehrt erhalten wir für jede glatte Funktion f eine 0-Form ω_f, die durch $p \mapsto (p, f(p))$ gegeben ist. Die Abbildung

$$C^\infty(M) \to \Omega^0(M) \qquad f \mapsto \omega_f$$

ist eine Bijektion. Wir benutzen im Folgenden diese Identifikation. 1-Formen sind nichts anderes als Kovektorfelder.

Beispiel 5.3.6. Sei M eine Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Sei $\Lambda^k(T^*U) = \pi^{-1}_{\Lambda^k(T^*M)}(U), \widetilde{\varphi})$ eine induzierte Karte, die wie oben von einer Bijektion

$$b\colon \{(i_1, \dots, i_r) | 1 \leq i_1, \cdots, i_r \leq n\} \to \{1, \dots, \binom{n}{k}\}$$

abhängt. Die Abbildung

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\colon p \mapsto \mathrm{d}x^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}|_p$$

ist eine k-Form auf U: $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}(p)$ liegt für alle $p \in U$ in $\Lambda^k(T_p^*M)$ und

$$\widetilde{\varphi} \circ \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \circ \varphi^{-1}$$

ist glatt, da

$$\widetilde{\varphi} \circ \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \circ \varphi^{-1}(x) = (x, e_{b(i_1,\dots,i_r)})$$

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ eine nicht notwendigerweise glatte Abbildung mit $\pi_{\Lambda^k(T^*M)} \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Sei (U, φ) eine Karte für M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Für jedes $p \in U$ finden wir $\omega_{i_1\dots i_k}(p) \in \mathbb{R}$, sodass

$$\omega(p) = \sum \omega_{i_1\dots i_k}(p) \mathrm{d}x^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}|_p.$$

Hier summieren wir über alle Tupel $(i_1, \dots, i_k)$ mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. So erhalten wir $\binom{n}{k}$ Funktionen

$$\omega_{i_1\dots i_k}\colon U \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \omega_{i_1\dots i_k}(p),$$

die wir die *Komponentenfunktionen* von ω in der Karte (U, φ) nennen. Der Beweis der folgenden Proposition ist analog zum Beweis von Proposition 3.4.3.

Proposition 5.3.7. *Seien M, ω wie oben. Die Abbildung ω ist genau dann eine glatte k-Form, wenn ihre Komponentenfunktionen $\omega_{i_1\dots i_k}$ in allen Karten glatt sind.*

Bemerkung 5.3.8. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M)$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und sei $f \in C^\infty(M)$. Wir definieren $\omega_1 + \omega_2, \lambda\omega_1$ und $f\omega_1 \in \Omega^k(M)$ punktweise:

$$(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p),$$
$$(\lambda\omega_1)(p) = \lambda\omega_1(p),$$
$$(f\omega_1)(p) = f(p)\omega_1(p).$$

Versehen mit diesen Operationen ist $\Omega^k(M)$ ein $C^\infty(M)$-Modul.

Definition 5.3.9. Sei M eine Mannigfaltigkeit und seien $\omega, \eta \in \Omega(M)$. Wir definieren $\omega \wedge \eta \in \Omega(M)$ mit

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p).$$

k-Formen als multilineare Abbildungen

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $\omega\colon M \to \Lambda^k(T^*M)$ eine nicht notwendigerweise glatte Abbildung mit $\pi_{\Lambda^k(T^*M)} \circ \omega = \mathrm{id}_M$. Für jedes $p \in M$ benutzen wir den Dualitätsisomorphismus $\Lambda^k(T_p^*M) \cong \mathrm{AM}_k(T_pM)$ aus Beispiel 5.1.57, um $\omega_p := \omega(p) \in \Lambda^k(T_p^*M)$ als eine alternierende multilineare Abbildung

$$\underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

zu interpretieren. Für k Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir die Funktion

$$\omega(X_1, \dots, X_k)\colon M \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \omega_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p).$$

Proposition 5.3.10. *Seien M und ω wie oben. ω ist genau dann eine glatte k-Form auf M, wenn die Abbildung $\omega(X_1, \dots, X_k)$ für je k beliebige Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ glatt ist.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von 5.2.10. □

Bemerkung 5.3.11. Wegen Proposition 5.3.10 induziert jede k-Form eine alternierende multilineare Abbildung

$$L_\omega\colon \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k\text{-mal}} \to C^\infty(M) \qquad (X_1, \dots, X_k) \mapsto \omega(X_1, \dots, X_k).$$

Die Abbildung L_ω ist im folgenden Sinne $C^\infty(M)$-*mutilinear*:

$$L_\omega(X_1, \dots, X_i, fX + gY, X_{i+1}, \dots, X_{k-1}) = fL_\omega(X_1, \dots, X_i, X, X_{i+1}, \dots, X_{k-1}) + gL_\omega(X_1, \dots, X_i, Y, X_{i+1}, \dots, X_{k-1})$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$, $X_1, \dots, X_{k-1}, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

Der Beweis der folgenden Proposition ist analog zum Beweis von Proposition 3.4.35

Proposition 5.3.12. *Sei*

$$L\colon \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-mal}} \to C^\infty(M) \qquad (X_1, \dots, X_r) \mapsto T(X_1, \dots, X_r)$$

eine alternierende $C^\infty(M)$-multilineare Abbildung. Dann existiert genau eine $(0, k)$-Form ω mit $L = L_\omega$. Wir benutzen hier die Notation aus Bemerkung 5.3.11.

Notation 5.3.13. Im Folgenden bezeichnen wir die durch eine k-Form induzierte alternierende $C^\infty(M)$-multilineare Abbildung ω ebenfalls mit ω statt L_ω.

Insertion-Operator und Pull-Back

Insertion-Operator

Sei M eine Mannigfaltigkeit. Sei X ein Vektorfeld auf M und $\omega \in \Omega^k(M)$. Betrachte die Abbildung

$$\iota_X(\omega)\colon M \to \Lambda^{k-1}(T^*M) \qquad p \mapsto \iota_{X_p}(\omega_p).$$

Es gilt $\iota_X(\omega)(p) \in \Lambda^{k-1}(T_p^*M)$. Um zu zeigen, dass $\iota_X(\omega)$ eine $(k-1)$-Form ist, überprüfen wir die Glattheit von $\iota_X(\omega)$. Sei $p \in M$ und sei (U,φ) eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1,\dots,x^n\}$. Seien $\omega_{i_1\dots i_r}$ und X^j die Komponentenfunktionen von ω bzw. X in der Karte (U,φ). Es gilt also

$$\omega|_U = \sum \omega_{i_1\dots i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$$

und $X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Daher erhalten wir

$$\iota_X(\omega)|_U = \sum_{1\le<i_1<\dots<i_k\le n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \omega_{i_1\dots i_r} \mathrm{d}x^{i_j}(X) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_j}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} =$$

$$\sum_{1\le<i_1<\dots<i_k\le n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \omega_{i_1\dots i_r} X^{i_j} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^{i_j}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

Daraus folgt die Glattheit von $\iota_X(\omega)$. Wir erhalten eine lineare Abbildung

$$\iota_X\colon \Omega(M) \to \Omega(M) \qquad \omega \mapsto \iota_X(\omega).$$

Sei $\omega \in \Omega^k(N)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Wir betrachten ω und $\iota_X(\omega)$ als alternierende multilineare Abbildungen. Dann gilt für alle $X_1,\dots,X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$

$$\iota_X(\omega)(X_1,\dots,X_{k-1}) = \omega(X,X_1,\dots,X_{k-1})$$

(vgl. Beispiel 5.1.57).

Pull-Back von Differentialformen

Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei $\omega \in \Omega^k(N)$. Betrachte die Abbildung

$$F^*(\omega)\colon M \to \Lambda^k(T^*M) \qquad p \mapsto \Lambda^k F^*_{F(p)}(\omega_{F(p)}).$$

Dann ist $F^*(\omega)(p) \in \Lambda^k(T_p^*M)$. Wir zeigen nun die Glattheit von $F^*(\omega)$. Sei $p \in M$ und sei (V,ψ) eine Karte um $F(p)$ mit Koordinatenfunktionen $\{y^1,\dots,y^n\}$. Seien $\omega_{i_1\dots i_r}$ die Komponentenfunktionen von ω in der Karte (V,ψ). Es gilt also

$$\omega|_V = \sum \omega_{i_1\dots i_r} \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^{i_r}.$$

Daher gilt

$$F^*(\omega)|_{F^{-1}(V)} = \sum (\omega_{i_1\dots i_r} \circ F)(F^*(\mathrm{d}y^{i_1}) \wedge \dots \wedge F^*(\mathrm{d}y^{i_r}) = \sum (\omega_{i_1\dots i_r} \circ F)\mathrm{d}(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge \mathrm{d}(y^{i_r} \circ F),$$

wobei wir Proposition 3.4.37 benutzt haben. Daraus folgt, dass $F^*(\omega)|_{F^{-1}(V)}$ glatt ist (vgl. Definition 5.3.9). Weiterhin setzen wir für $\omega \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$

$$F^*(\omega) := \omega \circ F$$

Definition 5.3.14. Seien M, N, F und ω wie oben. $F^*(\omega)$ heißt der *Pull-Back* von ω entlang F.

Wir erhalten für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine lineare Abbildung

$$F^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M) \qquad \omega \mapsto F^*(\omega).$$

Sei $\omega \in \Omega^k(N)$. Wir betrachten ω und $F^*(\omega)$ wie oben als alternierende multilineare Abbildungen. Dann gilt für alle $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$

$$F^*(\omega)(X_1, \ldots, X_k)(p) = \omega_{F(p)}((F_*)p((X_1)_p), \ldots, (F_*)p((X_k)_p))$$

(vgl. Beispiel 5.1.57). Die folgende Proposition ist eine unmittelbare Folgerung der Definition des Pull-Backs.

Proposition 5.3.15. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten und sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Seien $\omega, \eta \in \Omega(N)$. Dann gilt*

$$F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta).$$

Proposition 5.3.16. *Seien M und N n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Seien (U, φ) und (V, ψ) Karten auf M bzw. N mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ bzw. $\{y^1, \ldots, y^n\}$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{J}F_{\varphi,\psi}$ die Jacobi-Matrix der Abbildung*

$$F_{\varphi,\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(F(U) \cap V)$$

und setzen $\mathrm{D}F_{\varphi,\psi} \coloneqq \mathrm{J}F_{\varphi,\psi} \circ \varphi$. Dann gilt

$$F^*(f\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)|_{U \cap F^{-1}(V)} = (f \circ F)(det\, \mathrm{D}F_{\varphi,\psi}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

für alle $f \in C^\infty(V)$.

Aufgabe 5.3.17. Beweisen Sie Proposition5.3.16. (Hinweis: Fixieren Sie zunächst $p \in U \cap F^{-1}(V)$ und zeigen Sie, dass die Auswertung auf $(\frac{\partial}{\partial x^1} 1_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ auf beiden Seiten der Gleichung dasselbe Ergebnis liefert. Folgern Sie daraus die Aussage.)

Aufgabe 5.3.18. Betrachten Sie die 2-Form

$$\omega = r^1 \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3 + r^3 \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}r^3 \wedge \mathrm{d}r^1$$

auf $\mathbb{R}^3$, wobei r^i die i-te Standard-Koordinatenfunktion bezeichnet.

(i) Finden Sie die Koordinatendarstellung von ω in sphärischen Koordinaten. Mit sphärischen Koordinaten meinen wir hier die Karte auf $\mathbb{R}^3$ deren Inverse durch

$$(0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 \qquad (r, \varphi, \vartheta) \mapsto (r \cos\varphi \sin\vartheta, r \sin\varphi \sin\vartheta, r \cos\vartheta)$$

gegeben ist.

(ii) Sei $\iota\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ die Inklusionsabbildung. Berechnen Sie die Koordinatendarstellung von $\iota^*(\omega)$ in sphärischen Koordinaten. Mit sphärischen Koordinaten meinen wir hier die Karte auf $\mathbb{R}^3$ deren Inverse durch

$$(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S^2 \qquad (\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \cos\vartheta, \cos\vartheta)$$

gegeben ist.

Die äußere Ableitung

Das totale Differential (vgl. Bemerkung 3.4.30) ist eine lineare Abbildung

$$\mathrm{d}\colon \Omega^0(M) = C^\infty(M) \to \Omega^1(M) \qquad f \mapsto \mathrm{d}f.$$

In diesem Abschnitt finden wir eine Erweiterung von d auf $\Omega(M)$.

Theorem 5.3.19. *Es gibt eine eindeutige $\mathbb{R}$-lineare Abbildung* $\mathrm{d}\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für $f \in \Omega^0(M)$ stimmt $\mathrm{d}f$ mit dem totalen Differential von f überein.*

(ii) *Für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega(M)$ gilt*

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta.$$

(iii) $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Beweis. Wir nennen ein Operator d wie in der Aussage des Theorems eine äußere Ableitung auf M. Der Beweisstruktur ist wie folgt:

- *Erster Schritt*: Zuerst beweisen wir, dass eine eindeutige äußere Ableitung auf jeder Mannigfaltigkeit existiert, die eine globale Karte besitzt.
- *Zweiter Schritt* Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei (U, φ) eine Karte. Die nach dem ersten Schritt eindeutige äußere Ableitung auf U bezeichnen wir mit $\mathrm{d}_U\colon \Omega(U) \to \Omega(U)$. Wir zeigen, dass, falls eine äußere Ableitung $\mathrm{d}_M\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ auf M existiert, $(\mathrm{d}_M\omega)|_U = \mathrm{d}_U(\omega|_U)$ für alle $\omega \in \Omega(M)$ gilt.
- *Dritter Schritt*: Wir zeigen, dass es höchstens eine äußere Ableitung auf M existiert und definieren eine äußere Ableitung auf M mithilfe der äußeren Ableitungen $\mathrm{d}\colon \Omega(U_\alpha) \to \Omega(U_\alpha)$, wobei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ein Atlas für M ist.

Erster Schritt: Sei M eine Mannigfaltigkeit, die eine globale Karte (M, φ) besitzt und seien $x^1, \dots, x^n$ die Koordinatenfunktionen der Karte (M, φ). Jedes $\omega \in \Omega^k(M)$ ist gegeben durch

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

für geeignete glatte Funktionen $\omega_{i_1 \dots i_k}$. Falls $\mathrm{d}\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ wie in der Aussage existiert, dann gilt wegen (ii)

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \left(\mathrm{d}\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge (\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) + \omega_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) \right).$$

Wegen (i) ist $\mathrm{d}\omega_{i_1 \dots i_k}$ in der obigen Formel nichts anderes als das totale Differential von $\omega_{i_1 \dots i_k}$. Mit (iii) und (ii) erhalten wir

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}(\mathrm{d}x^{i_j}) \wedge \cdots \mathrm{d}x^{i_k} = 0.$$

Daraus folgt

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{d}\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge (\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}). \tag{$*$}$$

Falls $\mathrm{d}\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ existiert, dann ist es durch die obige Formel gegeben. Das zeigt die Eindeutigkeit von $\mathrm{d}\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$, falls M eine globale Karte besitzt. Umgekehrt, falls M wie oben eine globale Karte besitzt, können wir die Formel $(*)$ benutzen um $\mathrm{d}\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ zu definieren: Also setzen wir für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{d}|_{\Omega^k(M)}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M) \qquad \omega \mapsto \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \mathrm{d}\omega_{i_1\ldots i_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},$$

wobei $\omega_{i_1\ldots i_k}$ die Komponentenfunktionen von ω in der Karte (M,φ) sind. Weiterhin bezeichnen wir mit $\mathrm{d}|_{\Omega^0(M)}$ das totale Differential. Wir bemerken, dass dann

$$\mathrm{d}(f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

für ein beliebiges Tupel $(i_1,\ldots,i_k)$ mit $1 \le i_1,\ldots,i_k \le n$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt. Durch das Zusammensetzen der Abbildungen $\mathrm{d}|_{\Omega^k(M)}$ erhalten wir eine lineare Abbildung $\mathrm{d}\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$. Wir überprüfen nun, dass d die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) besitzt. (i) ist nach Definition erfüllt. Wegen der Linearität von d reicht es (ii) nur für Elemente der Form $\omega = f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ und $\eta = g\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$ mit $f, g \in C^\infty(M)$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ und $1 \le j_1 < \cdots < j_l \le n$ zu überprüfen. Es gilt

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\left(fg\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}\right) = \mathrm{d}(fg)\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}$$

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}(fg)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_l} =$$

$$\sum_j g\frac{\partial}{\partial x^j}(f)\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}+\sum_j f\frac{\partial}{\partial x^j}(g)\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_l}$$

$$= (\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) \wedge \eta + \sum_j (-1)^k f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}(g)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$$

$$= \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta.$$

Wir überprüfen jetzt, dass $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\mathrm{d} \circ \mathrm{d}(f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) = 0$$

für alle $f \in C^\infty(M)$ und $1 \le i_1 < \cdots < i_k < n$. Es gilt

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}(f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k})) = \mathrm{d}(\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(f)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) =$$

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(f)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(f)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} +$$

$$\sum_{i>j} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}(f)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}(f)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} +$$

$$\sum_{i<j} -\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}(f)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = 0,$$

wobei wir den Satz von Schwarz benutzt haben.

Zweiter Schritt: Sei (U, φ) eine Karte und sei d_U die (nach Schritt 1 eindeutige) äußere Ableitung auf U. Wir nehmen an, dass eine äußere Ableitung d_M auf M existiert. Wir zeigen, dass für jedes $\omega \in \Omega^k(M)$

$$\mathrm{d}_M(\omega)|_U = \mathrm{d}_U(\omega|_U)$$

gilt. Seien $\{x^1, \ldots, x^n\}$ die Koordinatenfunktionen von (U, φ). Seien $\omega_{i_1 \ldots i_k}$ die Komponentenfunktionen von ω in der Karte (U, φ). Sei $p \in U$. Seien $\eta_{i_1 \ldots i_k}$ und y^i glatte Funktionen auf M, die auf einer offenen Umgebung V von p mit $\omega_{i_1, \ldots i_k}$ bzw. x^i übereinstimmen. Sei weiterhin g eine glatte Funktion auf M mit $g(p) = 1$, die außerhalb von V verschwindet. Betrachte die Differentialform

$$\eta \coloneqq \sum \eta_{i_1 \ldots i_k} \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}.$$

Dann gilt $g(\omega - \eta) = 0$. Daraus folgt $\mathrm{d}_M(g(\omega - \eta)) = 0$, da d_M linear ist. Es gilt

$$0 = \mathrm{d}_M(g(\omega - \eta)) = \mathrm{d}g \wedge (\omega - \eta) + g\mathrm{d}_M(\omega - \eta). \tag{$*$}$$

Da g außerhalb von V verschwindet, verschwindet das totale Differential von g ebenfalls außerhalb von V. Andererseits verschwindet $\omega - \eta$ auf V. Insgesamt gilt also $\mathrm{d}g(\omega - \eta) = 0$. Wegen Gleichung $(*)$ gilt dann

$$0 = g\mathrm{d}_M(\omega - \eta) = g(\mathrm{d}_M(\omega) - \mathrm{d}_M(\eta))$$

und insbesondere

$$\mathrm{d}_M(\omega)(p) = \mathrm{d}_M(\eta)(p) = \mathrm{d}_M(\sum \eta_{i_1 \ldots i_k} \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k})(p) = \sum \mathrm{d}\eta_{i_1 \ldots i_k} \wedge (\mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k})(p)$$

$$= \sum \mathrm{d}\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge (\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}) = \mathrm{d}_U(\omega|_U)(p).$$

Da $p \in U$ beliebig war, folgt $\mathrm{d}_M(\omega)|_U = \mathrm{d}_U(\omega|_U)$.

Dritter Schritt: Zunächst zeigen wir, dass höchstens eine äußere Ableitung auf M existiert. Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ein Atlas für M. Seien d und d′ zwei äußere Ableitungen auf M. Sei $\omega \in \Omega(M)$ und $p \in M$. Dann existiert $\alpha_p \in \Lambda$, sodass $p \in U_{\alpha_p}$. Aus Schritt 2 wissen wird, dass

$$\mathrm{d}\omega(p) = \mathrm{d}_{U_\alpha}(\omega|_U)(p) = \mathrm{d}'\omega(p)$$

gilt Daraus folgt, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}'\omega$ für alle $\omega \in \Omega(M)$ und damit $\mathrm{d} = \mathrm{d}'$. Das zeigt die Eindeutigkeit der äußeren Ableitung auf M. Nun zeigen wir die Existenz. Wir benutzen den obigen Atlas und definieren $\mathrm{d}\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ wie folgt: Für $\omega \in \Omega(M)$ definieren wir $\mathrm{d}\omega$ als die Differentialform, deren Einschränkung auf U_α durch $\mathrm{d}_{U_\alpha}(\omega|_{U_\alpha})$ gegeben ist. Um die Wohldefiniertheit von $\mathrm{d}\omega$ zu beweisen, müssen wir zeigen, dass für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$

$$\mathrm{d}_{U_\alpha}(\omega|_{U_\alpha})|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \mathrm{d}_{U_\beta}(\omega|_{U_\beta})|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

gilt. Aus Schritt 2 folgt, dass beide Seiten der obigen Gleichung gleich $\mathrm{d}_{U_\alpha \cap U_\beta}(\omega|_{U_\alpha \cap U_\beta})$ sind. Wir erhalten also eine Abbildung $\mathrm{d}\colon \Omega(M) \to (M)$. Die gewünschte Eigenschaften von d folgen, aus den entsprechenden Eigenschaften von d_{U_α}. □

Definition 5.3.20. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Der Operator d aus Theorem 5.3.19 heißt die *äußere Ableitung auf M*.

Proposition 5.3.21. *Seien M und N Mannigfaltigkeiten und $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung.*

(i) $\mathrm{d}(\Omega^k(M)) \subset \Omega^{k+1}(M)$.

(ii) $F^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ F^*$.

Aufgabe 5.3.22. Beweisen Sie Proposition 5.3.21.

Aufgabe 5.3.23. In dieser Aufgabe bezeichnen r^i die Standardkoordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$

1. Betrachten Sie die Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (s,t) \mapsto (st, e^t).$$

   Sei $\omega = r^1 \mathrm{d}r^2$. Berechnen Sie $F^*(\omega)$, $\mathrm{d}\omega$ und $F^*(\mathrm{d}\omega)$.

2. Betrachten Sie die Abbildung

$$G\colon \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \qquad (x,y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

   Sei

$$\eta = \frac{r^1 \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3 + r^3 \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}r^3 \wedge \mathrm{d}r^1}{((r^1)^2 + (r^2)^2 + (r^3)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

   Berechnen Sie $G^*(\eta)$, $\mathrm{d}\eta$ und $G^*(\mathrm{d}\eta)$.

Bemerkung 5.3.24. Alle bisherigen Begriffe aus Abschnitt 5.2 und Abschnitt 5.3 können ohne Weiteres auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand eingeführt werden. Alle dortige Aussagen gelten dann auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand und können genauso wie oben bewiesen werden.

Kapitel 6

Integralkurven, Flüsse und die Lie Ableitung

6.1 Integralkurven und Flüsse

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $\gamma\colon (a,b) \to M$ eine glatte Kurve. Sei r die Standardkoordinatenfunktion auf $\mathbb{R}$. Wir haben gesehen, dass $\dot\gamma(t) \coloneqq (\gamma_*)_t(\frac{\partial}{\partial r}|_t)$ für jedes $t \in (a,b)$ mit dem durch γ induzierten Vektor an der Stelle $\gamma(t)$ übereinstimmt. Wir können $\dot\gamma(t)$ als der Geschwindigkeitsvektor von γ an der Stelle t interpretieren. Sei nun $X \in \mathfrak{X}(M)$. Wir suchen nach Kurven, deren Geschwindigkeitsvektor durch das Vektorfeld X gegeben ist. Präziser:

Definition 6.1.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen. Eine C^1-Kurve $\gamma\colon I \to M$ mit

$$\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$$

für alle $t \in I$ heißt eine *Integralkurve* von X.

Beispiel 6.1.2. Sei r die Standardkoordinatenfunktion auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten das Vektorfeld $X \coloneqq \frac{\partial}{\partial r}$. Für jedes $p_0 \in \mathbb{R}$ ist die Kurve

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto p_0 + t$$

eine Integralkurve von X mit „Anfangswert“ $\gamma(0) = p_0$, da

$$\dot\gamma(t) = (\gamma_*)_t(\frac{\partial}{\partial r}|_t) = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial r}|_{\gamma(t)=p+t} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial r}|_{\gamma(t)} = \frac{\partial}{\partial r}|_{\gamma(t)}.$$

Beispiel 6.1.3. Sei r die Standardkoordinatenfunktion auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten das Vektorfeld $X \coloneqq \frac{\partial}{\partial r} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Für jedes $p_0 > 0$ ist die Kurve

$$\gamma\colon (-p_0, \infty) \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto p_0 + t$$

eine Integralkurve von X mit „Anfangswert“ $\gamma(0) = p_0$. Wir bemerken, dass diese Integralkurve nicht auf ein größeres Intervall erweitert werden kann.

Beispiel 6.1.4. Seien r^1, r^2 die Standardkoordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten das Vektorfeld $X \coloneqq -r^2\frac{\partial}{\partial r^1} + r^1\frac{\partial}{\partial r^2}$. Für jedes $R \in \mathbb{R}$ ist die Kurve

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto R\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

eine Integralkurve von X, da

$$(\gamma_*)_t(\frac{\partial}{\partial r}|_t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\cos t)\frac{\partial}{\partial r^1}|_{\gamma(t)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\sin t)\frac{\partial}{\partial r^2}|_{\gamma(t)} = -R\sin t\frac{\partial}{\partial r^1}|_{\gamma(t)} + R\cos t\frac{\partial}{\partial r^2}|_{\gamma(t)} = X_{\gamma(t)}.$$

Sei $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Dann existieren $R, \varphi \in \mathbb{R}$, sodass $p = R\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$. Die Kurve

$$\gamma_{p_0} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto R\begin{pmatrix}\cos(t+\varphi) \\ \sin(t+\varphi)\end{pmatrix}$$

ist eine Integralkurve von X mit dem Anfangswert p_0.

Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Wie kann man Integralkurven von X finden? Sei $\gamma \colon (a,b) \to M$ eine C^1-Kurve. Sei (U,φ) eine Karte mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Wir bezeichnen mit γ^i die Komponetenfunktionen von γ in der Karte (U,φ), also $\gamma^i \coloneqq x^i \circ \gamma$. Weiterhin seien X^i die Komponentenfunktionen von X in der Karte (U,φ). Für $t \in \gamma^{-1}(U)$ gilt

$$\dot\gamma(t) = (\gamma_*)_t(\frac{\partial}{\partial r}|_t) = \sum_i \dot{\gamma^i}(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)},$$

wobei $\dot{\gamma^i}(t) \coloneqq \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}(t)$. $\gamma|_{\gamma^{-1}(U)}$ ist genau dann eine Integralkurve von X, wenn

$$\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)} \iff \sum_i \dot{\gamma^i}(t)\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)} = \sum_i X^i(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\gamma(t)}$$

für alle $t \in \gamma^{-1}(U)$. Daraus folgt

$$\dot{\gamma^i}(t) = X^i(\gamma(t)) \quad \forall t \in \gamma^{-1}(U), i \in \{1 \le i \le n\}. \tag{$*$}$$

Wir setzen $a \coloneqq \varphi \circ \gamma$, $F \coloneqq (X^1 \circ \varphi^{-1}, \dots, X^n \circ \varphi^{-1})$ und schreiben $(*)$ um:

$$\dot a(t) = F(a(t)) \quad \forall t \in \gamma^{-1}(U). \tag{\#}$$

Wir fassen zusammen: $\gamma|_{\gamma^{-1}(U)}$ ist genau dann eine Integralkurve von X, wenn, die Komponetenfunktionen von γ in der Karte (U,φ) das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung (#) lösen. Wir erwähnen das folgende klassische Ergebnis zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen solcher Systeme.

Theorem 6.1.5. *Seien $V \subset \mathbb{R}^n$ und $T \subset \mathbb{R}$ offen. Sei $F \colon V \times I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Wir betrachten das System*

$$\dot a(t) = F(a(t), t)$$

von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

1. *Seien $I, I' \subset T$ offen und sei $t_0 \in I \cap I'$. Seien $a \colon I \to \mathbb{R}^n$ und $b \colon I' \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der obigen Differentialgleichung mit $a(t_0) = b(t_0)$. Dann stimmen a und b auf einer offenen Umgebung von t_0 überein.*

2. *Sei $x_0 \in V$ und $t_0 \in I$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $V_0 \subset V$ von x_0, sodass die obige Differentialgleichung für jedes $x \in V_0$ eine Lösung*

   $$a_{t_0,x} \colon (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to V \qquad \text{mit } a_{t_0,x}(t_0) = x$$

   hat.

3. *Seien x_0, t_0, ϵ, V_0 und $a_{t_0,x}$ wie oben. Die Abbildung*

$$V_0 \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to V \qquad (x,t) \mapsto a_{t_0,x}(t)$$

ist glatt.

Die Anwendung von Theorem 6.1.5 auf Gleichung (#) ergibt die folgende Proposition.

Proposition 6.1.6. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

1. *Seien $I, I' \subset \mathbb{R}$ offen und sei $t_0 \in I \cap I'$. Seien $\gamma\colon I \to M$ und $\eta\colon I' \to M$ Integralkurven von X mit $\gamma(t_0) = \eta(t_0)$. Dann stimmen γ und η auf einer offenen Umgebung von t_0 überein.*

2. *Sei $p_0 \in M$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung U_0 von p_0, sodass für jedes $p \in U_0$ eine Integralkurve*

$$\gamma_{t_0,p}\colon (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to M$$

von X mit $\gamma_{t_0,p}(t_0) = p$existiert.

3. *Seien p_0, t_0, ϵ, U_0 und $a_{t_0,p}$ wie oben. Die Abbildung*

$$U_0 \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to M \qquad (p,t) \mapsto \gamma_{t_0,p}(t)$$

ist glatt.

Beweis.

1. Wir setzen $p := \gamma(t_0) = \eta(t_0)$. Sei (U, φ) eine Karte um p. Seien $X^i \in C^\infty(U)$ die Komponentenfunktionen von X in der Karte (U, φ). Wir definieren

$$F\colon \varphi(U) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad (x,t) \mapsto (X^1 \circ \varphi^{-1}(x), \ldots, X^n \circ \varphi^{-1}(x)),$$

$a := \varphi \circ \gamma|_{\gamma^{-1}(U)}$ und $b = \varphi \circ \eta|_{\eta^{-1}(U)}$. Da γ und η Integralkurven sind, sind a und b Lösungen des Systems

$$\dot{c}(t) = F(c(t), t)$$

von Differentialgleichungen. Nach Teil 1 von Theorem 6.1.5 stimmen a und b in einer offenen Umgebung von t_0 überein. Entsprechend stimmen γ und η in einer offenen Umgebung von t_0 überein.

2. Sei (U, φ) eine Karte um p_0, $X^i \in C^\infty(U)$ die Komponentenfunktionen von X in der Karte (U, φ) und

$$F\colon \varphi(U) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad (x,t) \mapsto (X^1 \circ \varphi^{-1}(x), \ldots, X^n \circ \varphi^{-1}(x)).$$

Nach Teil 2 von Theorem 6.1.5 existieren ein $\epsilon > 0$ und $V_0 \subset \varphi(U)$, sodass die Differentialgleichung

$$\dot{a}(t) = F(a(t), t)$$

für jedes $x \in V_0$ eine Lösung

$$a_{t_0,x}\colon (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \varphi(U) \qquad \text{mit } a_{t_0,x}(t_0) = x$$

hat. Wir setzen $U_0 := \varphi^{-1}$. Sei $p \in U_0$. Dann ist

$$\gamma_{t_0,p} := \varphi^{-1} \circ a_{t_0,\varphi(p)}\colon (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to M$$

eine Integralkurve von X mit

$$\gamma_{t_0,p} = \varphi^{-1}(a_{t_o,\varphi(p)}(t_0)) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p.$$

3. Wir benutzen weiter die Notation vom vorherigen Teil des Beweises. Nach Teil 3 von Theorem 6.1.5 ist die Abbildung

$$V_0 \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to \varphi(U) \qquad (x, t) \mapsto a_{t_0,x}(t)$$

glatt. Die Abbildung

$$U_0 \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to M \qquad (p, t) \mapsto \gamma_{t_0,p}(t)$$

entsteht durch die Präkomposition der vorherigen Abbildung mit der glatten Abbildung

$$U_0 \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to V_0 \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \quad (p, t) \mapsto (\varphi(p), t)$$

und die Postkomposition der resultierenden Abbildung mit φ^{-1} und ist damit glatt.

□

Proposition 6.1.7. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Für jedes $p \in M$ existieren $c(p) < d(p) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und eine glatte Kurve $\gamma_p\colon (c(p), d(p)) \to M$ von X mit der Eigenschaften:*

(i) $0 \in (c(p), d(p))$ *und* $\gamma_p(0) = p$.

(ii) γ_p *ist eine Integralkurve von* X.

(iii) Falls $\mu\colon (c', d') \to M$ eine weitere glatte Integralkurve von X mit $0 \in (c', d')$ und $\mu(0) = p$ ist, dann gilt $(c', d') \subset (c(p), d(p))$ und $\gamma|_{(c',d')} = \mu$.

Definition 6.1.8. Wir nennen γ_p aus der Proposition 6.1.7 die *maximale Integralkurve von X mit dem Anfangswert p.*

Beweis von Proposition 6.1.7. Wir definieren $(c(p), d(p))$ als die Vereinigung aller offenen Intervalle (a, b) um 0, sodass eine Integralkurve $\eta\colon (a, b) \to M$ von X mit $\eta(0) = p$ existiert. Wegen Teil 2 von Proposition 6.1.6 gilt $0 \in (c(p), d(p))$. Seien I_1, I_2 offene Intervalle um 0 und seien $\eta_j\colon I_j \to M$ Integralkurven von X mit $\eta_j(0) = p$. Wir zeigen, dass η_1 und η_2 auf $I_1 \cap I_2$ übereinstimmen. Nach Teil 2 von Proposition 6.1.6 ist die Menge von Punkten, auf denen die η_j übereinstimmen, offen. Andererseits ist diese Menge abgeschlossen, da η_j stetig sind und somit für jede Folge $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset I_1 \cap I_2$ mit $\eta_1(t_i) = \eta_2(t_i)$ die gegen ein $t \in I_1 \cap I_2$ konvergiert

$$\eta_1(t) = \lim_{i\to\infty} \eta_1(t_i) = \lim_{i\to\infty} \eta_2(t_i) = \eta_2(t)$$

gilt. Da $I_1 \cap I_2$ zusammenhängend ist, stimmen η_1 und η_2 auf $I_1 \cap I_2$ überein. Für $t \in (c(p), d(p))$ sei $\eta\colon I \to M$ eine Integralkurve von X definiert auf einem offenen Intervall I um 0 mit $t \in I$ und $\eta(0) = p$. Wir setzen $\gamma_p(t) = \eta(t)$. Wegen der vorherigen Überlegung ist

$$\gamma_p\colon (c(p), d(p)) \to M$$

wohldefiniert und erfüllt die Voraussetzungen der Aussage. □

Aufgabe 6.1.9. Sei $p \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die maximalen Integralkurven der Vektorfelder

$$X = \frac{\partial}{\partial r^1} + \frac{\partial}{\partial r^2} \quad \text{und} \quad Y = r^1\frac{\partial}{\partial r^1} + r^2\frac{\partial}{\partial r^2}$$

auf $\mathbb{R}^2$ mit Anfansgwert (a, b).

Notation 6.1.10. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Wir benutzen die Notation von Proposition 6.1.7 und definieren

$$\mathcal{D}_t^X := \{p \in M | t \in (c(p), d(p))\}$$

für $t \in \mathbb{R}$, wobei $c(p), d(p)$ die Zahlen aus Proposition 6.1.7 sind. Falls das Vektorfeld X aus dem Kontext klar ist, schreiben wir $\mathcal{D}_t$ statt $\mathcal{D}_t^X$.

Proposition 6.1.11. *Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Wir bezeichnen die maximale Integralkurve von X mit dem Anfangswert p im Folgenden mit γ_p. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\Phi_t \colon \mathcal{D}_t \to M \qquad p \mapsto \gamma_p(t).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Für jedes $p_0 \in M$ existiert ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung U von p_0, sodass die Abbildung*
$$U \times (\epsilon, \epsilon) \to M \qquad (p, t) \mapsto \Phi_t(p)$$
wohldefiniert und glatt ist.

2. *Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich der Abbildung*
$$\Phi_s \circ \Phi_t \colon \Phi_t^{-1}(\mathcal{D}_s) \to M$$
(also $\Phi_t^{-1}(\mathcal{D}_s)$) ist in $\mathcal{D}_{t+s}$ enthalten und es gilt $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{t+s}|_{\Phi_t^{-1}(\mathcal{D}_s)}$.

3. *$\mathcal{D}_t$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ offen.*

4. *Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\Phi_t \colon \mathcal{D}_t \to M$ ein Diffeomorphismus auf $\mathcal{D}_{-t}$.*

Beweis.

1. Die Aussage ist eine unmittelbare Folgerung von Teil 3 von Proposition 6.1.6.

2. **Aufgabe**

3. Wegen Teil 2 von Proposition 6.1.6 ist $\mathcal{D}_0 = M$ (und damit offen). Sei $t > 0$ und $q \in \mathcal{D}_t$. Da $\gamma_q([0, t])$ kompakt ist, finden wir mithilfe von Teil 1 $p_1, \ldots, p_k \in \gamma_q([0, t])$, $\epsilon_1, \epsilon_k > 0$ und offene Umgebungen U_i von p_i mit $W := \bigcup_{i=1}^k U_i \supset \gamma_q([0, t])$, sodass die Abbildungen
$$U_i \times (-\epsilon_i, \epsilon_i) \to M \qquad (p, t) \mapsto \Phi_t(p)$$
wohldefiniert und glatt sind. Wir setzen $\epsilon := \min\{\epsilon_i\}$. Die Abbildung
$$W \times (-\epsilon, \epsilon) \to M \qquad (p, t) \mapsto \Phi_t(p)$$
ist dann wohldefiniert und glatt. Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $t/N \in (\epsilon, \epsilon)$. Wir setzen $\alpha_1 := \Phi_{t/N}|_W$ und $W_1 := \alpha_1^{-1}(W)$. Weiterhin definieren wir induktiv
$$\alpha_i := \Phi_{t/N}|_{W_{i-1}} \quad \text{und} \quad W_i := \alpha_i^{-1}(W_{i-1}).$$
Jedes α_i ist eine glatte Abbildung auf einer offenen Teilmenge W_{i-1} von W. Insbesondere ist W_N eine offene Teilmenge von W. Wir bemerken, dass
$$\gamma_q(t - \frac{t}{N}) \in W \text{ und } \alpha_1(\gamma_q(t - \frac{t}{N})) = \gamma_q(t) \implies \gamma_q(t - \frac{t}{N}) \in W_1$$

Induktiv zeigt man, dass für $m \in \{1, \ldots, N\}$

$$\gamma_q(t - m\frac{t}{N}) \in W_m.$$

Insbesondere gilt also

$$q = \gamma_q(0) = \gamma_p(t - N\frac{t}{N}) \in W_N.$$

Weiterhin sieht man induktiv, dass $W_m \subset \mathcal{D}_{m\frac{t}{N}}$ für $m \in \{1, \ldots, N\}$ gilt. Insbesondere gilt $W_N \subset \mathcal{D}_t$. Die Offenheit von $\mathcal{D}_t$ für $t > 0$ folgt. Analog zeigt man die Offenheit von $\mathcal{D}_t$ für $t < 0$.

4. Wir zeigen zuerst, dass $\Phi_t(\mathcal{D}_t) = \mathcal{D}_{-t}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $p \in \mathcal{D}_t$. Sei $\gamma_p \colon (c(p), d(p)) \to M$ die maximale Integralkurve von X mit dem Anfangswert p. Dann ist

$$\eta \colon (c(p) - t, d(p) - t) \to M \qquad s \mapsto \gamma_p(s + t)$$

eine Integralkurve von X mit dem Anfangswert $\gamma_p(t) = \Phi_t(p)$ und es gilt $-t \in (c(p) - t, d(p) - t)$. Daraus folgt $\Phi_t(p) \in \mathcal{D}_{-t}$ und wir erhalten die Inklusion $\Phi_t(\mathcal{D}_t) \subset \mathcal{D}_{-t}$. Sei nun $q \in \mathcal{D}_{-t}$. Wegen der vorherigen Beobachtung gilt $\Phi_{-t}(\mathcal{D}_{-t}) \subset \mathcal{D}_t$. Daraus folgt, dass $\Phi_t \circ \Phi_{-t}$ auf $\mathcal{D}_{-t}$ definiert ist und wegen Teil 1 dort mit id_M übereinstimmt. Es gilt also

$$\Phi_t(\Phi_{-t}(q)) = \mathrm{id}_M(q) = q.$$

Daraus folgt, dass $q \in \Phi_t(\mathcal{D}_t)$ und daher $\Phi_t(\mathcal{D}_t) \supset \mathcal{D}_{-t}$. Wir haben also gezeigt, dass

$$\Phi_t(\mathcal{D}_t) = \mathcal{D}_{-t}.$$

Wegen Teil 2 gilt

$$\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \mathrm{id}_M |_{\mathcal{D}_{-t}} \quad \text{und} \quad \Phi_{-t} \circ \Phi_t = \mathrm{id}_M |_{\mathcal{D}_t}.$$

Φ_t ist also bijektiv mit inverser Abbildung Φ_{-t}. Es bleibt zu zeigen, dass diese Abbildungen glatt sind. Sei $q \in \mathcal{D}_t$. Seien W, W_i und α_i wie im Beweis von Teil 3. Dann gilt

$$\Phi_t | W_N = \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_N |_{W_N}.$$

Also ist $\Phi_t|_{W_N}$ als eine Verkettung glatter Abbildungen glatt. Da $q \in \mathcal{D}_t$ beliebig war, folgt die Glattheit von Φ_t. Ähnlich zeigt man, die Glattheit von Φ_{-t}.

□

Bemerkung 6.1.12. Wir erhalten also für jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ eine Familie $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ von Diffeomorphismen, die auf offenen Teilmengen von M definiert sind. Wir benutzen manchmal die Notation Φ_t^X statt Φ_t. Wir setzen

$$\mathcal{D}(X) := \{(p, t) | p \in \mathcal{D}_t\}.$$

Man kann zeigen, dass $\mathcal{D}(X)$ eine offene Umgebung von $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}$ und dass die Abbildung

$$\mathcal{D}(X) \to M \qquad (p, t) \mapsto \Phi_t(p)$$

glatt ist.

Definition 6.1.13. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt *vollständig*, falls alle maximalen Integralkurven von X (mit beliebigem Anfangswert) auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Mit anderen Worten: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{D}_t = M$.

Beispiel 6.1.14. Die Vektorfelder in Beispiel 6.1.2 und 6.1.4 sind vollständig. Das Vektorfeld in Beispiel 6.1.3 ist nicht vollständig.

Aufgabe 6.1.15. Jedes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist vollständig.

Aufgabe 6.1.16. Sei r die Standardkoordinatenfunktion auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $(r^2+1)\frac{\partial}{\partial r}$ nicht vollständig ist.

Definition 6.1.17. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine Familie $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ von Diffeomorphismen $\Phi_t\colon M \to M$ heißt eine *(globale)* 1*-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen*, falls

- $\Phi\colon M \times \mathbb{R} \to M, \quad (p,t) \mapsto \Phi_t(p)$ glatt ist,
- $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$ und
- $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{t+s}$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ gilt.

Beispiel 6.1.18. Sei X ein vollständiges Vektorfeld auf M. Dann ist $\Phi_t^X\colon M \to M$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus und $\{\Phi_t^X\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine globale 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen.

Bemerkung 6.1.19. Sei $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen. Für $p \in M$ definieren wir

$$\gamma_p\colon \mathbb{R} \to M \qquad t \mapsto \Phi_t(p).$$

Man kann dann zeigen, dass

$$X\colon M \to TM \qquad p \mapsto \dot\gamma_p(0)$$

ein (glattes) Vektorfeld auf M ist und dass $\{\Phi_t^X\}_{t\in\mathbb{R}}$ mit $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ übereinstimmt.

Bemerkung 6.1.20. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Die Familie $\{\Phi_t^X\}_{t\in\mathbb{R}}$ hat ähnliche Eigenschaften wie eine 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen. Der Unterschied ist, dass die Diffeomorphismen Φ_t^X nicht global sondern nur auf $\mathcal{D}_t$ definiert sind. Wie nennen so eine Familie eine *lokale* 1*-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen.* (Es ist möglich eine von Vektorfeldern unabhängige Definition von lokalen 1-Parameter-Gruppe zu geben.)

6.2 Die Lie-Ableitung

Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sei $\{\Phi_t\}$ die durch X erzeugte lokale 1-Parametergruppe. Sei $f \in C^\infty(M) = \mathcal{T}_0^0(M) = \Omega^0(M)$. Für $p \in M$ sei γ eine Integralkurve von X mit $\gamma(0) = p$. Dann gilt

$$X(f)(p) = \frac{\mathrm{d}(f\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\Phi_t(p)) - f(p)}{t}.$$

Wir interpretieren $X(f)$ als die Ableitung von f in Richtung des Vektorfelds X. Wir bezeichnen die Abbildung $\mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M) \to C^\infty(M) = \mathcal{T}_0^0(M)$, die f auf $X(f)$

abbildet, mit $\mathcal{L}_X$. Sei nun $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Wir wollen ähnlich wie oben die Ableitung von T in Richtung X definieren. Ein naiver Definitionsversuch wäre:

$$\mathcal{L}_X(T)(p) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{T_{\Phi_t(p)} - T_p}{t}.$$

Diese Definition ergibt jedoch **keinen** Sinn, da $T_{\Phi_t(p)}$ in $T^r_s(T_{\Phi_t(p)}M)$ und T_p in $T^r_s(T_pM)$ liegt. Um $T_{\Phi_t(p)}$ und T_p zu vergleichen, müssen wir eine Verbindung zwischen $T^r_s(T_{\Phi_t(p)}M)$ und $T^r_s(T_pM)$ herstellen.

Notation 6.2.1. Seien X und $\{\Phi_t\}$ wie oben und sei $t \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathcal{D}^X_t$. Falls r und s nicht beide 0 sind, bezeichnen wir die Abbildung

$$\left(\bigotimes^r ((\Phi_{-t})_*)_{\Phi_t(p)}\right) \otimes \left(\bigotimes^s ((\Phi_t)^*_{\Phi_t(p)})\right) : T^r_s(T_{\Phi_t(p)}M) \to T^r_s(T_pM)$$

im Folgenden mit $\widetilde{\Phi}_{-t}$. Falls $r = s = 0$ setzen wir $\widetilde{\Phi}_{-t} \coloneqq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Definition 6.2.2. Seien M, X und $\{\Phi_t\}$ wie oben. Seien $r, s \in \mathbb{N}_0$. Die lineare Abbildung

$$\mathcal{L}_X\colon \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^r_s(M) \quad T \mapsto \left(p \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{\Phi}_{-t}(T_{\Phi_t(p)}) - T_p}{t}\right)$$

heißt die *Lie-Ableitung in Richtung X*.

Bemerkung 6.2.3. Wie bemerken, dass $T^r_s(T_pM)$ auf kanonische Weise ein topologischer Raum ist, sodass der Limes in Definition 6.2.2 Sinn ergibt.

Bemerkung 6.2.4. Wir bemerken, dass die Glattheit von $\mathcal{L}_X(T)$ für $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$ mit unseren jetzigen Kenntnisse nicht klar ist. Dies folgt aus unseren späteren Überlegungen.

Bemerkung 6.2.5. Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Aus der Definition der Lie-Ableitung folgt sofort, dass $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$ für jedes $f \in \mathcal{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$.

Proposition 6.2.6. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$$

für jedes $Y \in \mathcal{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M)$.

Zuerst beweisen wir ein Lemma.

Lemma 6.2.7 (vgl. Proposition 1.2.23)**.** *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $D \subset M \times \mathbb{R}$ offen mit $M \times \{0\} \subset D$. Sei $f \in C^\infty(D)$ und $f(p,0) = 0$ für jedes $p \in M$. Dann existiert $g \in C^\infty(D)$, sodass $f(p,t) = tg(p,t)$ und $\frac{\partial}{\partial t} f(p,0) = g(p,0)$ für jedes $p \in M$.*

Beweis. Die Funktion

$$g\colon D \to \mathbb{R} \qquad (p,t) \mapsto \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(p, st)\mathrm{d}s$$

erfüllt die Bedingungen der Aussage. □

Beweis von Proposition 6.2.6. Wir zeigen, dass

$$(\mathcal{L}_X(Y))\,(f) = [X,Y](f)$$

für beliebiges $f \in C^\infty(M)$ gilt. Sei $\{\Phi_t\}$ die durch X induzierte (a priori) lokale 1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen. Sei $f \in C^\infty(M)$. Die Funktion $F\colon (p,t) \mapsto f(\Phi_t(p)) - f(p)$ ist auf $\mathcal{D}(X)$ (siehe Bemerkung 6.1.20) wohldefiniert und dort glatt. Nach einer Anwendung von Lemma 6.2.7 erhalten wir eine glatte Funktion $g \in C^\infty(\mathcal{D}(X))$ mit $F(p,t) = tg(p,t)$ und $\frac{\partial}{\partial t}F(p,0) = g(p,0)$ für jedes $p \in M$. Wir setzen $g_t(p) \coloneqq g(p,t)$ und berechnen

$$X(f)(p) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\Phi_t(p)) - f(p)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{F(t,p)}{t} = \lim_{t\to 0} g_t(p) = g_0(p) \implies X(f) = g_0$$

Für t hinreichend klein gilt

$$\widetilde{\Phi}_{-t}(Y_{\Phi_t(p)})(f) = Y_{\Phi_t(p)}(f \circ \Phi_{-t}) = -tY_{\Phi_t(p)}(g_{-t}) + Y_{\Phi_t(p)}(f)$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X(Y))\,(f)(p) &= \lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{\Phi}_{-t}(Y_{\Phi_t(p)}) - Y_p}{t}(f) = \lim_{t\to 0}\frac{-tY_{\Phi_t(p)}(g_{-t}) + Y_{\Phi_t(p)}(f) - Y_p(f)}{t}\\ &= -Y_p(X(f)) + \lim_{t\to 0}\frac{Y_{\Phi_t(p)}(f) - Y_p(f)}{t} = -Y_p(X(f)) + X_p(Y(f)) = [X,Y]_p(f)\end{aligned}$$

□

Der Beweis der folgenden Proposition ist analog zum Beweis von der Produktregel für Ableitungen von Funktionen in Analysis I.

Proposition 6.2.8. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sei $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$ und $T' \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(M)$. Dann gilt $\mathcal{L}_X(T \otimes T') = \mathcal{L}_X(T) \otimes T' + T \otimes \mathcal{L}_X(T')$.*

Bemerkung 6.2.9. Sei M eine Mannigfaltigkeit und seien $r,s \in \mathbb{N}$. Für $p \in M$ sei $C_p\colon T^r_s(T_pM) \to T^{r-1}_{s-1}(T_pM)$ die (k,l)-Kontraktion. Sei $T\colon M \to T^r_s(M)$ eine Abbildung mit $T_p \in T^r_s(T_pM)$. Wir bezeichnen mit $C(T)$ die Abbildung

$$M \to T^{r-1}_{s-1}(M) \qquad p \mapsto C_p(T_p).$$

Es gilt $C(T)_p \in T^{r-1}_{s-1}(T_pM)$. $C\colon T \mapsto C(T)$ ist eine Abbildung, die nicht notwendigerweise glatte (r,s)-Tensorfelder auf nicht notwendigerweise glatte $(r-1,s-1)$-Tensorfelder abbildet. Falls T glatt ist, ist $C(T)$ auch glatt und wir erhalten eine Abbildung

$$C \coloneqq \mathcal{T}^r_s(M) \to \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(M)$$

die wir auch Kontraktion nennen.

Proposition 6.2.10. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sei C eine Kontraktion. Dann gilt $\mathcal{L}_X \circ C = C \circ \mathcal{L}_X$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage für die eindeutige Kontraktion auf dem Raum der nicht notwendigerweise glatten $(1,1)$-Tensorfelder. Der Beweis des allgemeinen Falls ist ähnlich. Dafür reicht es zu zeigen, dass für $\omega \in \mathcal{T}^0_1(M) = \Omega^1(M)$ und $Y \in \mathcal{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M)$

$$\mathcal{L}_X(C(X \otimes \omega) = C(\mathcal{L}_X(X \otimes \omega))$$

gilt. Nach Definition gilt

$$\mathcal{L}_X(C(Y\otimes\omega))(p)=\lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{\Phi}_{-t}\left(C(Y\otimes\omega)(\Phi_t(p))\right)-C(Y\otimes\omega)(p)}{t}$$

und $\widetilde{\Phi}_{-t}\left(C(Y\otimes\omega)(\Phi_t(p))\right)=C(Y\otimes\omega)(\Phi_t(p))=\omega(Y)(\Phi_t(p))$. Andererseits gilt

$$C\left(\widetilde{\Phi}_{-t}\left(Y\otimes\omega\right)\left(\Phi_t(p)\right)\right)=C\left((\Phi_{-t})_*(Y_{\Phi_t(p)})\otimes(\Phi_t^*)_{\Phi_t(p)}(\omega_{\Phi_t(p)})\right)=$$

$$(\Phi_t^*)_{\Phi_t(p)}(\omega_{\Phi_t(p)})\left((\Phi_{-t})_*(Y_{\Phi_t(p)})\right)=\omega_{\Phi_t(p)}\left((\Phi_t)_*(\Phi_{-t})_*(Y_{\Phi_t(p)})\right)=\omega(Y)(\Phi_t(p)).$$

Also kommutieren C und Φ_{-t}. Daher gilt

$$\mathcal{L}_X(C(Y\otimes\omega))(p)=C\left(\lim_{t\to 0}\frac{\widetilde{\Phi}_{-t}\left((Y\otimes\omega)_{\Phi_t(p)}\right)-(Y\otimes\omega)_p}{t}\right)=C\left(\mathcal{L}_X(Y\otimes\omega)\right)(p)\quad\square$$

Proposition 6.2.11. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $X\in\mathfrak{X}(M)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_X(\omega)(Y)=\mathcal{L}_X(\omega(Y))-\omega([X,Y])$$

für jedes $\omega\in\mathcal{T}_1^0(M)=\Omega^1(M)$ und $Y\in\mathcal{T}_0^1(M)=\mathfrak{X}(M)$.

Beweis. Sei C die eindeutige Kontraktion von (nicht notwendigerweise glatten) $(1,1)$-Tensorfeldern. Wir berechnen

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y))=\mathcal{L}_X(C(Y\otimes\omega))=C(\mathcal{L}_X(Y\otimes\omega))=C(\mathcal{L}_X(Y)\otimes\omega+Y\otimes\mathcal{L}_X(\omega))$$

$$=\omega([X,Y])+\mathcal{L}_X(\omega)(Y).\quad\square$$

Bemerkung 6.2.12. Aus Proposition 6.2.6 und Proposition 6.2.11 folgt die Glattheit der Lie-Ableitungen von Vektorfeldern und Kovektorfeldern. Die Glattheit der Lie-Ableitung von allgemeinen Tensorfeldern folgt aus dieser Beobachtung und Proposition 6.2.8.

Analog wie Proposition 6.2.11 kann man die folgende Proposition zeigen.

Proposition 6.2.13. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $X\in\mathfrak{X}(M)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_X(T)(Y_1,\dots,Y_k)=\mathcal{L}_X(T(Y_1,\dots,Y_k))-\sum_{i=1}^{k}T(Y_1,\dots,Y_{i-1},[X,Y_i],Y_{i+1},\dots,Y_k)$$

für jedes $T\in\mathcal{T}_k^0(M)$ und $Y_1,\dots,Y_k\in\mathcal{T}_0^1(M)=\mathfrak{X}(M)$.

Die Lie-Ableitung von Differentialformen

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $X\in\mathfrak{X}(M)$. Mithilfe der durch X induzierten lokalen 1-Parameter-Gruppe $\{\Phi_t\}$ können wir ähnlich wie oben die Ableitung von Differentialformen in Richtung X definieren.

Notation 6.2.14. Seien X und $\{\Phi_t\}$ wie oben. Sei $t\in\mathbb{R}$ und $p\in\mathcal{D}_t^X$. Falls $k\neq 0$, bezeichnen wir die Abbildung

$$\bigwedge^k(\Phi_t)^*_{\Phi_t(p)}\colon\Lambda^k(T_{\Phi_t(p)}M)\to\Lambda^k(T_pM)$$

im Folgenden mit $\widetilde{\Phi}_{-t}$. Falls $k=0$, setzen wir $\widetilde{\Phi}_{-t}\coloneqq\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Definition 6.2.15. Seien M, X und $\{\Phi_t\}$ wie oben. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Die lineare Abbildung

$$\mathcal{L}_X \colon \Omega^k(M) \to \Omega^k(M) \quad \omega \mapsto \left(p \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{\Phi}_{-t}(\omega_{\Phi_t(p)}) - \omega_p}{t}\right)$$

heißt die *Lie-Ableitung in Richtung X.*

Bemerkung 6.2.16. Auf $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ und $\Omega^1(M) = \mathcal{T}_1^0(M)$ stimmen die Lie-Ableitungen aus Definition 6.2.2 und Definition 6.2.15 überein. Die Tatsache, dass die Lie-Ableitung einer Differentialform glatt ist, folgt aus diese Beobachtung und Proposition 6.2.17 unten.

Der Beweis der folgenden Proposition ist analog zm Beweis von der Produktregel für Ableitungen von Funktionen in Analysis I.

Proposition 6.2.17. *[vgl. Proposition 6.2.8] Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega^l(M)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta).$$

Das folgende Resultat stellt eine Verbindung zwischen der Lie-Ableitung von Differentialformen, dem Insertion-Operator und der äußeren Ableitung her.

Proposition 6.2.18. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}_X = \iota_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \iota_X.$$

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte mit Koordinatenfunktionen $\{x^i\}$. Da jede Differentialform auf M eingeschränkt auf U eine Linearkombination von Differentialformen der Form $f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ mit $f \in C^\infty(U)$ ist, reicht es die Gleichheit von $\mathcal{L}_X$ und $\iota_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \iota_X$ auf solchen Differentialformen zu überprüfen. Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega^l(M)$. Dann erhalten wir mit einer kleinen Rechnung

$$(\iota_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \iota_X)(\omega \wedge \eta) = (\iota_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \iota_X)(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\iota_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \iota_X)(\eta).$$

Weiterhin kommutieren $\mathcal{L}_X$ und $\iota_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \iota_X$ mit d. Daher reicht es die Gleichheit dieser Operatoren nur auf Funktionen zu überprüfen. Für $f \in C^\infty(M)$ gilt

$$(\iota_X \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \iota_X)(f) = \iota_X(\mathrm{d}f) = X(f) = \mathcal{L}_X(f). \quad \square$$

Proposition 6.2.19. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

1. *Für jedes $\omega \in \Omega^k(M)$ und $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ gilt*

$$\mathcal{L}_X(\omega)(Y_1, \ldots, Y_k) = \mathcal{L}_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_{i=1}^{k} \omega(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, [X, Y_i], Y_{i+1}, \ldots, Y_k).$$

2. *Für jedes $\omega \in \Omega^k(M)$ und $Y_0, Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ gilt*

$$\mathrm{d}\omega(Y_0, \ldots, Y_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i Y_i \left(\omega(Y_0, \ldots, \widehat{Y_i}, \ldots, Y_k)\right) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \ldots, \widehat{Y_i}, \ldots, \widehat{Y_j}, \ldots, Y_k).$$

Aufgabe 6.2.20. Beweisen Sie Proposition 6.2.19.

Kapitel 7

Integration auf Mannigfaltigkeiten

Das Hauptziel dieser Veranstaltung ist die Verallgemeinerung von Konzepten der Differential- und Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten. Bis jetzt haben wir die Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten entwickelt und könnten z. B. die Glattheit von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten und die Ableitung von glatten Funktionen auf Mannigfaltigkeiten sinnvoll definieren. Wir möchten in diesem Kapitel die Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten und Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern. Zuerst betrachten wir einen naiven Versuch das Integral von Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit zu definieren, der auf eine der Hauptschwierigkeiten hinweist: Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei f eine glatte (oder allgemeiner stetige) Funktion auf M. Wir setzen zuerst voraus, dass der Träger von f im Definitionsbereich einer Karte (U, φ) enthalten ist und setzen $\int_M f = \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}$, wobei das Integralzeichen auf der rechten Seite das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Falls der Träger von f nicht im Definitionsbereich einer Karte enthalten ist, könnten wir versuchen f mithilfe einer Zerlegung der Eins in Funktionen zu zerlegen, die diese Eigenschaft haben und das Integral von f als Summe der Integrale dieser Funktionen zu definieren. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist dieser auf dem ersten Blick natürlich erscheinende Definitionsversuch jedoch nicht zielführend.

Beispiel 7.0.1. Sei $M = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Sei $f \in C^\infty(M)$ die konstante Eins-Funktion. Wenn wir die Identitätskarte auf M benutzen, erhalten wir mit der obigen Definition $\int_M f = \mathrm{vol}(\mathrm{B}_1(0)) = \pi$. Wenn wir die Karte

$$\varphi_r \colon M \to \mathbb{R}^2 \qquad p \mapsto rp$$

für $r > 0$ benutzen, erhalten wir mit der obigen Definition $\int_M f = \mathrm{vol}(\mathrm{B_r}(0)) = \pi r^2$.

7.1 Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $n \geq 1$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Bas}(V)$ die Menge der geordneten Basen von V. Seien $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathrm{Bas}(V)$. Wir sagen, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ die *gleiche Orientierung* haben, falls die Determinante der Basiswechselmatrix zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ positiv ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Bas}(V)$. Es entstehen genau zwei Äquivalenzklassen, die wir *Orientierungen* nennen.

Bemerkung 7.1.1. Falls $V = \{0\}$, nennen wir eine Wahl eines Elements von $\{\pm 1\}$ eine Orientierung von V.

Definition 7.1.2.

- Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit der Wahl einer Orientierung heißt ein *orientierter Vektorraum*.
- Falls $\dim V \geq 1$ und V orientiert ist, nennen wir jede geordnete Basis von V, die in der gewählten Orientierung ist eine *orientierte Basis*.

Bemerkung 7.1.3. Sei V eine $\mathbb{R}$-Vektorrum mit $\dim V \geq 1$. Durch die Wahl einer geordneten Basis können wir eine Orientierung auf V wählen, nämlich die Orientierung, die die gewählte Basis zu einer orientierten Basis macht.

Beispiel 7.1.4. Die *Standard-Orientierung* von $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$ ist die Orientierung, die die Standard-Basis zu einer orientierten Basis macht. Die Standard-Orientierung von $\mathbb{R}^0$ ist $+1$.

Aufgabe 7.1.5. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit $n \geq 1$. Sei $A \in \mathrm{L}(V;V)$. Zeigen Sie, dass für jedes $\omega \in \Lambda^n(V^*)$

$$\bigwedge^n A^*(\omega) = \det A\omega$$

gilt, wobei wir mit $\det A$ die Determinante der darstellenden Matrix von A in einer beliebigen Basis bezeichnen.

Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum mit $n \geq 1$. Sei $0 \neq \omega \in \Lambda^n(V^*) \cong \mathrm{AM}_n(V)$. Seien $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ und $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ geordnete Basen von V und sei $A\colon V \to V$ die eindeutige lineare Abbildung, die e_i auf f_i abbildet. Wir bemerken, dass die darstellende Matrix von A bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ genau die Basiswechselmatrix zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$ ist. Dann gilt

$$\omega(f_1, \ldots, f_n) = \omega(A(e_1), \ldots, A(e_n)) = (\bigwedge^n A^*\omega)(e_1, \ldots, e_n) = \det A\omega(e_1, \ldots, e_n).$$

Daraus folgt, dass $\omega(f_1, \ldots, f_n)$ und $\omega(e_1, \ldots, e_n)$ genau dann das gleiche Vorzeichen haben, wenn $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ die gleiche Orientierung haben. Daraus folgt, dass

$$\{(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{Bas}(V) | \omega(e_1, \ldots, e_n) > 0\}$$

eine Orientierung auf V ist, die wir die *durch ω induzierte* Orientierung auf V nennen.

Bemerkung 7.1.6. Falls V ein nulldimensionaler Vektorrum ist, ist $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$. Für $0 \neq \omega \in \Lambda^0(V^*)$ erklären wir $+1$ (-1) als die durch ω induzierte Orientierung, falls $\omega > 0$ $(\omega < 0)$ ist.

Bemerkung 7.1.7. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $0 \neq \omega \in \Lambda^n(V^*)$. Da $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$, gibt es für jedes $\eta \in \Lambda^n(V^*)$ ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\eta = c\omega$. Es ist klar, dass ω und η genau dann die gleiche Orientierung induzieren, wenn $c > 0$ ist. Daher entspricht die Wahl eine Orientierung auf V die Wahl einer Zusammenhangskomponente von $\Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$.

Sei nun M eine Mannigfaltigkeit. Eine *punktweise Orientierung auf M* ist eine Wahl einer Orientierung für $T_pM \in M$ für jedes p. Wir interessieren uns für punktweise Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten, die sich in einem geeigneten Sinne stetig verhalten. Wir benötigen die folgende Definition, um dieses Konzept zu präzisieren.

Definition 7.1.8. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $n \geq 1$. Sei $U \subset M$ offen. Ein *Rahmen für TM über U* ist ein Tupel $(X_1, \dots, X_n)$ von Vektorfeldern X_i auf U, sodass $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$ für jedes $p \in U$ eine Basis von T_pM ist.

Definition 7.1.9. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

- Eine punktweise Orientierung auf M heißt eine *Orientierung*, falls für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung U und ein Rahmen $(X_1, \dots, X_n)$ von TM über U existiert, sodass $(X_1(q), \dots, X_n(q))$ für jedes $q \in U$ eine orientierte Basis ist.

- M heißt *orientierbar*, falls eine Orientierung auf M existiert.

- M zusammen mit der Wahl einer Orientierung heißt eine *orientierte Mannigfaltigkeit.*

Bemerkung 7.1.10. Für eine Mannigfaltigkeit mit Rand definieren wir die Begriffe Orientierung, orientierbar und orientiert analog.

Bemerkung 7.1.11. Für 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten nennen wir jede punktweise Orientierung eine Orientierung.

Beispiel 7.1.12. Sei $n \geq 1$. Für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ ist T_pM kanonisch isomorph zu $\mathbb{R}^n$ und wir versehen T_pM mit der Standard-Orientierung auf $\mathbb{R}^n$. Das Tupel $(\frac{\partial}{\partial r^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial r^n})$ ist ein Rahmen für $T\mathbb{R}^n$ (über $\mathbb{R}^n$), der ausgewertet an jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ eine orientierte Basis von T_pM ergibt. So erhalten wir die *Standard-Orientierung* der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$.

Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$. Dann induziert ω_p für jedes $p \in M$ eine Orientierung auf T_pM und wir erhalten so eine punktweise Orientierung auf M.

Proposition 7.1.13. *Seien M und ω wie oben. Die wie oben durch ω induzierte punktweise Orientierung auf M ist eine Orientierung.*

Beweis. Falls $\dim M = 0$, gibt es nichts zu zeigen. Sei $\dim M \geq 1$. Für jedes $p \in M$ konstruieren wir ein Rahmen für TM über einer offenen Umgebung von p, der ausgewertet an jeder Stelle eine orientierte Basis ergibt. Sei $p \in M$ und sei (U, φ) eine Karte um p mit U zusammenhängend und mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Dann existiert $f \in C^\infty(U)$, sodass $\omega|_U = f \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$. Da ω nirgendwo verschwindet und U zusammenhängend ist, ist die Funktion f entweder überall positiv oder überall negativ. Falls f überall positiv ist, ist das Tupel $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ ein Rahmen für TM über U, der ausgewertet an jeder Stelle eine orientierte Basis ergibt. Falls f überall negativ ist, ist $\{-\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ ein solcher Rahmen für TM über U. Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 7.1.14. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir haben also gezeigt, dass jede n-Form auf M, die an keiner Stelle verschwindet eine Orientierung auf M induziert.

Bemerkung 7.1.15. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand und sei ω eine n-Form, die nirgendwo verschwindet. Sei η eine weitere n-Form auf M. Da $\dim \Lambda^n(T_pM) = 1$ für jedes $p \in M$, finden wir ein $f \in C^\infty(M)$, sodass $\eta = f\omega$. Falls f nirgendwo verschwindet, verschwindet η ebenfalls an keiner Stelle und induziert damit eine Orientierung auf M. Die durch ω und η induzierten Orientierung sind genau dann gleich, wenn f überall positiv ist. Insbesondere induzieren ω und $f\omega$ für alle glatten positiven Funktionen f die gleiche Orientierung.

Proposition 7.1.16. *Sei M eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand. Die Orientierung auf M wird durch eine nirgends verschwindende n-Form induziert.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für jedes p eine nirgends verschwindende n-Form auf einer offenen Umgebung U von p existiert, die an jedem Punkt $q \in U$ die Orientierung von T_qM induziert. Dann kann man solche n-Formen mithilfe einer Zerlegung der eins zusammenkleben um eine n-Form definieren, die die Orientierung auf M induziert. Sei $p \in M$. Dann existiert eine offene Umgebung V von p und ein Rahmen $(X_1, \ldots, X_n)$ für TM über V, der an jeder Stelle $q \in V$ eine orientierte Basis von T_qM liefert. Sei (U, φ) eine Karte auf M mit $U \subset V$ zusammenhängend und mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Die Funktion $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n(X_1, \ldots, X_n)$ ist entweder überall positiv oder überall negativ. Falls sie überall positiv ist, induziert die n-Form $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ an jeder Stelle $q \in U$ die Orientierung von T_qM. Sonst induziert die n-Form $-\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ an jeder Stelle $q \in U$ die Orientierung von T_qM. $\square$

Beispiel 7.1.17. Die Standard-Orientierung von $\mathbb{R}^n$ wird durch die n-Form $\mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n$ induziert.

Aufgabe 7.1.18. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann ist M entweder nicht orientierbar oder besitzt genau zwei Orientierungen.

Bemerkung 7.1.19. Falls M eine zusammenhängende n-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit ist und $\omega \in \Omega^n$ eine nirgends verschwindende n-Form, dann werden die zwei mögliche Orientierungen auf M durch ω und $-\omega$ induziert.

Definition 7.1.20. Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand mit $\dim M \geq 1$.

- Eine Karte (U, φ) von M mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ heißt eine *orientierte Karte*, falls $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p)$ für alle $p \in U$ eine orientierte Basis von T_pM ist.
- Ein Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ heißt ein *orientierter Atlas*, falls jede Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ eine orientierte Karte ist.

Bemerkung 7.1.21. Sei M wie in Definition 7.1.20. Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ein orientierter Atlas. Wegen Proposition 3.1.24 ist die Determinante der Jacobi-Matrix der Kartenwechselabbildungen $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ überall auf ihrem Definitionsbereich.

Proposition 7.1.22. *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit* $\dim M \geq 1$ *oder eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand mit* $\dim M \geq 2$. *Dann existiert ein orientierter Atlas auf M.*

Beweis. Sei $p \in M$ und sei (U, φ) eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ und mit U zusammenhängend. Falls (U, φ) keine orientierte Karte ist, ist die Karte $(U, \widetilde{\varphi})$ mit Koordinatenfunktionen $\{-x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ eine orientierte Karte. So erhalten wir eine orientierte Karte auf einer offenen Umgebung jedes Punkts von M. Die Behauptung folgt. $\square$

Aufgabe 7.1.23. Sei M eine Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand mit $\dim M \geq 1$. Sei $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ein Atlas für M mit der Eigenschaft, dass die Determinante der Jacobi-Matrix der Kartenwechselabbildungen $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ für alle $\alpha, \beta \in \Lambda$ überall auf ihrem Definitionsbereich positiv ist. Dann existiert eine Orientierung auf M, die $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ zu einem orientierten Atlas macht.

Bemerkung 7.1.24. Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand. Im Folgenden nennen wir eine Karte (U, φ) mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ *negativ* orientiert, falls $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ an keinem Punkt $p \in U$ eine orientierte Basis von T_pM ist. Eine Karte (U, φ) mit U zusammenhängend ist entweder orientiert oder negativ orientiert (**Warum?**). Falls U nicht zusammenhängend ist, ist es natürlich möglich, dass (U, φ) weder orientiert noch negativ orientiert ist. Da wir immer einen Atlas finden können dessen Karten zusammenhängende Definitionsbereiche haben, können wir immer einen Atlas finden, dessen Karten entweder orientiert oder negativ orientiert sind.

Wir benötigen das folgende Konzept später.

Definition 7.1.25. Seien M und N orientierte Mannigfaltigkeiten oder Mannigfaltigkeiten mit Rand und sei $F\colon M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus. F heißt *orientierungserhaltend*, falls für jedes $p \in M$ und jede orientierte Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von T_pM die Basis $((F_*)_p(v_1), \ldots, (F_*)_p(v_n))$ eine orientierte Basis von $T_{F(p)}M$ ist. F heißt *orientierungsumkehrend*, wenn für jedes $p \in M$ und jede orientierte Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von T_pM die Basis $((F_*)_p(v_1), \ldots, (F_*)_p(v_n))$ keine orientierte Basis von $T_{F(p)}M$ ist.

Beispiel 7.1.26. Seien M und N Mannigfaltigkeiten oder Mannigfaltigkeiten mit Rand, sei N orientiert und $\omega \in \Omega^{\dim N}(N)$ eine $\dim N$-Form, die die Orientierung auf N induziert. Sei $F\colon M \to N$ ein lokaler Diffeomorphismus. Dann ist $F^*(\omega)$ eine nirgends verschwindende Form auf M und induziert damit eine Orientierung auf M. Wir behaupten, dass, wenn M mit dieser Orientierung versehen wird, die Abbildung F zu einer orientierungserhaltenden Abbildung wird. In der Tat: Für $p \in M$ und jede orientierte Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von T_pM gilt

$$0 < F^*(\omega)_p(v_1, \ldots, v_n) = \omega_{F(p)}((F_*)_p(v_1), \ldots, (F_*)_p(v_n)).$$

Orientierungen auf Untermannigfaltigkeiten

Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $S \subset M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit (evtl. mit Rand) der Kodimension 0 oder 1 und sei $\iota\colon S \to M$ die Inklusionsabbildung. Wir untersuchen jetzt, ob und wie M auf halbwegs natürliche Weise eine Orientierung auf S induzieren kann.

Sei S eine immersierte Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. Da die Abbildung $(\iota_*)_p$ für jedes $p \in S$ ein Isomorphismus ist, können wir wie üblich mit deren Hilfe T_pS mit T_pM identifizieren. So erhalten wir eine punktweise Orientierung auf S. Wir zeigen nun, dass diese eine Orientierung auf S ist. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ eine n-Form, die die Orientierung auf M induziert. Dann ist $\eta := \iota^*(\omega)$ eine n-Form auf S, die nirgendwo verschwindet und offensichtlich die gerade definierte punktweise Orientierung auf S induziert. Daraus folgt, dass diese punktweise Orientierung eine Orientierung auf S ist.

Beispiel 7.1.27. Jede offene Teilmenge einer orientierten Mannigfaltigkeit kann auf natürliche Weise orientiert werden. Die Orientierung von $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$, die durch die Standard-Orientierung auf $\mathbb{R}^n$ wie oben definiert wird, heißt die *Standard-Orientierung* auf $\mathbb{H}^n$.

Sei S nun eine immersierte Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1. Im Allgemeinen ist S nicht immer orientierbar. Der Möbiusband ist nicht orientierbar, kann aber als eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ realisiert werden. Falls S weitere Bedingungen erfüllt, kann man jedoch mithilfe der Orientierung auf M auf halbwegs natürliche Weise eine Orientierung auf S definieren.

Proposition 7.1.28. *Sei M eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand mit $n \geq 2$ und sei S eine immersierte Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1. Sei $\iota\colon S \to M$ die Inklusionsabbildung und N ein Vektorfeld entlang ι mit $N_p \in T_pM \setminus T_pS$ für alle $p \in S$. Dann existiert genau eine Orientierung auf S, sodass für jedes p und $v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_pS$ das Tupel $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ genau dann eine orientierte Basis von T_pS ist, wenn $(N_p, v_1, \ldots, v_{n-1})$ eine orientierte Basis von T_pM ist. Falls ω eine Orientierung induzierende n-Form auf M ist, dann induziert die $(n-1)$-Form $\iota^*(\iota_N(\omega))$ definiert durch*

$$S \to \Lambda^n(T^*S) \qquad p \mapsto (v_1, \ldots, v_{n-1} \mapsto \omega_p(N_p, (\iota_*)_p(v_1), \ldots, (\iota_*)_p(v_{n-1})))$$

die gerade beschriebene Orientierung auf S.

Beweis. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ eine n-Form, die die Orientierung auf M induziert. Lokal ist S ein Slice einer Karte auf M. Man kann mithilfe solcher Karten zeigen, dass $\iota_*(\iota_N(\omega))$ eine glatte $(n-1)$-Form auf S ist. Weiterhin verschwindet $\iota^*(\iota_N(\omega))$ an keiner Stelle: Sei $p \in S$ und $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ eine Basis von T_pS. Dann ist $\{N_p, (\iota_*)_p(v_1), \ldots, (\iota_*)_p(v_{n-1})\}$ eine Basis von T_pM. Da ω nicht verschwindet, gilt

$$\omega_p(N_p, (\iota_*)_p(v_1), \ldots, (\iota_*)_p(v_{n-1})) \neq 0.$$

Die Orientierung, die durch $\iota^*(\iota_N(\omega))$ auf S induziert wird, hat nach Konstruktion die in der Aussage geforderte Eigenschaft. □

Bemerkung 7.1.29. Sei M eine eindimensionale Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand, S eine nulldimensionale Untermannigfaltigkeit und N ein Vektorfeld entlang der Inklusionsabbildung mit $N_p \neq 0$ ($\iff$ $N_p \in T_pM \setminus T_pS$). Anlog zum vorherigen Proposition können wir mithilfe von N eine Orientierung auf S definieren: T_pS hat die Orientierung $+1$ (-1), falls $\omega_p(N_p) > 0$ $(\omega_p(N_p) < 0)$ gilt.

Beispiel 7.1.30. Die *Standard-Orientierung* auf S^n ist die Orientierung, die wie in Proposition 7.1.28 mithilfe des Vektorfelds N entlang der Inklusionsabbildung definiert durch

$$S^n \to T\mathbb{R}^{n+1} \qquad (\xi^1, \ldots, \xi^{n+1}) \mapsto \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial r^i}|_{(\xi^1,\ldots,\xi^{n+1})}$$

induziert wird. Was ist die Standard-Orientierung von $S^0 = \{\pm 1\}$? Die Orientierung auf $\mathbb{R}$ wird durch die Form $\mathrm{d}r$ induziert. Wir haben

$$\mathrm{d}r|_{\pm 1}(N_{\pm 1}) = \mathrm{d}r|_{\pm 1}(\pm 1 \frac{\partial}{\partial r}|_{\pm 1}) = \pm 1.$$

Die Orientierung des Vektorraums $T_{\pm 1}S^0$ ist also ± 1

Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir wollen die obige Prozedur benutzen, um eine Orientierung auf dem Rand von M zu definieren. Sei $\iota\colon \partial M \to M$. Wir haben schon gesehen, dass ein nach innen und damit auch ein nach außen zeigendes Vektorfeld entlang ι existiert.

Proposition 7.1.31. *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Die induzierte Orientierung auf ∂M durch voneinander verschiedene nach außen zeigende Vektorfelder entlang des Rands stimmen überein.*

Beweis. Sei $\iota\colon \partial M \to M$ die Inklusionsabbildung. Seien N_1 und N_2 nach außen zeigende Vektorfelder entlang ι. Sei $p \in \partial M$ und $(e_1, \dots, e_{n-1})$ eine orientierte Basis von $T_p\partial M$ bezüglich der durch N_1 induzierten Orientierung. Wir zeigen, dass $(e_1, \dots, e_{n-1})$ ebenfalls bezüglich der durch N_2 induzierten Orientierung orientiert ist. Sei (U, φ) eine Karte von M um p mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \dots, x^n\}$. Dann gilt

$$N_1(p) = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \quad \text{und} \quad N_2(p) = \sum_i \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

für geeignete Zahlen ξ^i und ζ^i mit $\xi^n, \zeta^n < 0$. Weiterhin gilt

$$N_2(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i e_i + \alpha^n N_1(p).$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i e_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

Wir vergleichen den Koeffizienten von $\frac{\partial}{\partial x^n}$ auf beiden Seiten. Da e_i für $1 \leq i \leq n-1$ in der linearen Hülle von $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}|_p\}$ enthalten ist, erhalten wir

$$\zeta^n = \alpha^n \xi^n \implies \alpha^n = \frac{\zeta^n}{\xi^n}.$$

Die Determinante der Basiswechselmatrix zwischen den Basen $(N_1(p), e_1, \dots, e_{n-1})$ und $(N_2(p), e_1, \dots, e_{n-1})$ ist also $\frac{\zeta^n}{\xi^n}$. Daher haben diese Basen die gleiche Orientierung. Die Behauptung folgt. □

Definition 7.1.32. Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Die Orientierung auf ∂M, die durch ein beliebiges nach außen zeigendes Vektorfeld entlang ∂M induziert wird, heißt die *Stokes-Orientierung*.

Beispiel 7.1.33. Wir versehen $\mathbb{H}^n$ hier mit der Standard-Orientierung (induziert durch $\mathrm{d}r^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}r^n$). Der Rand von $\mathbb{H}^n$ kann mithilfe der Abbildung

$$\partial\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{n-1} \qquad (\xi^1, \dots, \xi^{n-1}, 0) \mapsto (\xi^1, \dots, \xi^{n-1})$$

kanonischerweise mit $\mathbb{R}^{n-1}$ identifiziert werden und kann damit mit der Standard-Orientierung von $\mathbb{R}^{n-1}$ versehen werden (vgl. Beispiel 7.1.26). Wie hängt diese Orientierung zusammen mit der Stokes-Orientierung auf $\partial\mathbb{H}^n$. Dafür müssen wir nur herausfinden, ob $(\frac{\partial}{\partial r^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial r^{n-1}}|_p)$ für $p \in \partial\mathbb{H}^n$ eine orientierte Basis bezüglich der Stokes-Orientierung ist oder nicht. Das Vektorfeld $-\frac{\partial}{\partial r^n}|_{\partial\mathbb{H}^n}$ ist ein nach außen zeigendes Vektorfeld entlang $\partial\mathbb{H}^n$. Wir berechnen

$$\mathrm{d}r^1|_p \wedge \dots \wedge \mathrm{d}r^n|_p(-\frac{\partial}{\partial r^n}|_p, \frac{\partial}{\partial r^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial r^{n-1}}|_p) = (-1)^n.$$

Die Stokes-Orientierung und die Standard-Orientierung auf $\partial\mathbb{H}^n$ stimmen also für gerade n überein.

7.2 Integration von Differentialformen

Zuerst erinnern wir uns an den Transformationssatz aus der Integralrechnung.

Theorem 7.2.1. *Seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Sei $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus und sei $\mathrm{J}\Phi\colon U \to \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$ die Abbildung, die jeden Punkt $x \in U$ auf die Jacobi-Matrix von Φ an x abbildet. Sei f eine messbare Funktion auf V. Dann ist f genau dann auf V integrierbar, wenn $|det\ \mathrm{J}\Phi| f \circ \Phi$ auf U integrierbar ist und*

$$\int_V f = \int_U |det\ \mathrm{J}\Phi| f \circ \Phi$$

gilt.

Sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand mit $n \geq 1$. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ eine n-Form, deren Träger im Definitionsbereich einer orientierten oder negativ orientierten Karte (U, φ) enthalten ist (siehe Bemerkung 7.1.24). Seien $\{x^1, \dots, x^n\}$ die Koordinatenfunktionen von (U, φ). Dann existiert eine eindeutige Funktion $f \in C^\infty(U)$, sodass $\omega|_U = f \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. Falls (U, φ) eine orientierte Karte ist, setzen wir

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}.$$

Falls (U, φ) negativ orientiert ist, setzen wir

$$\int_M \omega := -\int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}.$$

Wir behaupten, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der (negativ) orientierten Karte ist, solange deren Definitionsbereich den Träger von ω beinhaltet. Sei (V, ψ) eine weitere negativ orientiert oder orientierte Karte mit $\operatorname{supp} \omega \in V$ und mit Koordinatenfunktionen $\{y^1, \dots, y^n\}$. Dann existiert eine eindeutige Funktion $g \in C^\infty(V)$, sodass $\omega_V = g \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$.

Proposition 7.2.2. *Seien M, ω, (U, φ), (V, ψ), f und g wie oben. Dann gilt*

$$\int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1} = \int_{\psi(V)} g \circ \psi^{-1},$$

falls beide Karten orientiert oder negativ orientiert sind, und

$$\int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1} = -\int_{\psi(V)} g \circ \psi^{-1},$$

falls nicht.

Beweis. Seien

$$\mathrm{id}_{\varphi,\psi} := \psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

und

$$\mathrm{id}_{\psi,\varphi} := \varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

die Kartenwechselabbildungen. Für $x \in \psi(U \cap V)$ bezeichnen wir die Jacobi-Matrix von $\mathrm{id}_{\psi,\varphi}$ in x mit $\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi}(x)$. Weiterhin bezeichnen wir die ji-te Komponente von $\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi}(x)$ mit $A_i^j(x)$. Dann gilt

$$\mathrm{d}x^j|_p = \sum_i A_i^j(\psi(p)) \mathrm{d}y^i.$$

Daraus folgt

$$\omega_p = f(p)\mathrm{d}x^1|_p \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n|_p = f(p)\left(\sum_i A_i^1(\psi(p))\mathrm{d}y^i|_p\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_i A_i^n(\psi(p))\mathrm{d}y^i|_p\right) =$$

$$f(p)\det\left(A_j^i(\psi(p))\right)_{ij}\mathrm{d}y^1|_p \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n|_p.$$

Wir erhalten also

$$g = \det(\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi} \circ \psi)f.$$

Wir berechnen

$$\int_{\psi(V)} g \circ \psi^{-1} = \int_{\psi(U\cap V)} g \circ \psi^{-1} = \int_{\psi(U\cap V)} \det(\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi})(f \circ \psi^{-1}) =$$

$$\int_{\psi(U\cap V)} \det(\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi})\left((f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\psi^{-1})\right) = \int_{\psi(U\cap V)} \det(\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi})\left((f\circ\varphi^{-1})\circ \mathrm{id}_{\psi,\varphi}\right).$$

Falls die Karten (U,φ) und (V,ψ) beide orientiert oder negativ orientiert sind, gilt

$$\int_{\psi(U\cap V)} \det(\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi})\left((f\circ\varphi^{-1})\circ \mathrm{id}_{\psi,\varphi}\right) = \int_{\psi(U\cap V)} |\det(\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi})|\left((f\circ\varphi^{-1})\circ \mathrm{id}_{\psi,\varphi}\right).$$

Falls eine der beiden Karten negativ orientiert und die andere Karte orientiert ist, gilt

$$\int_{\psi(U\cap V)} \det(\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi})\left((f\circ\varphi^{-1})\circ \mathrm{id}_{\psi,\varphi}\right) = -\int_{\psi(U\cap V)} |\det(\mathrm{J}\,\mathrm{id}_{\psi,\varphi})|\left((f\circ\varphi^{-1})\circ \mathrm{id}_{\psi,\varphi}\right).$$

Die Behauptung folgt mit einer Anwendung des Transformationssatzes mit dem Diffeomorphismus $\mathrm{id}_{\psi,\varphi}$. □

Sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand.

Notation 7.2.3. Wir bezeichnen mit $\Omega_c^k(M)$ den Raum der kompakt getragenen k-Formen.

Zunächst definieren wir das Integral auf kompakt getragenen n-Formen:

$$\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}.$$

Falls $n = 0$, ist $\Omega_c^0(M)$ die Menge der kompakt getragenen Funktionen auf M und wir definieren

$$\int_M \omega = \sum_{p\in M} \pm\omega(p),$$

wobei $+1$ der Koeffizient von $\omega(p)$ ist, falls die Orientierung auf T_pM $+1$ ist, und -1 sonst. Sei nun $n \geq 1$ und $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Da $\operatorname{supp}\omega$ kompakt ist, existieren Karten (U_1,φ_1), …, (U_k,φ_k), die wir als negativ orientiert oder orientiert voraussetzen können, sodass $\operatorname{supp}\omega \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$ gilt. Wir wählen nun eine Zerlegung der Eins $\{\eta_i\}_{i\leq i\leq k}$ auf $\bigcup_{i=1}^k U_i$ bezüglich der Überdeckung $\{U_i\}_{1\leq i\leq k}$ und definieren

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^k \int_M \eta_i\omega.$$

Wir bemerken, dass η_i und damit $\eta_i\omega$ a priori nur auf $\bigcup_{i=1}^k U_i$ definiert sind. Da jedoch $\operatorname{supp}\omega \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$, können wir $\eta_i\omega$ mit 0 fortsetzen, um eine Form auf M zu erhalten.

Proposition 7.2.4. *Seien M und ω wie oben. Dann ist $\int_M \omega$ unabhängig von der Wahl von (U_i, φ_i) und η_i definiert.*

Beweis. Seien $(V_1, \psi_1), \ldots, (V_l, \psi_l)$ negativ orientierte oder orientierte Karten mit $\operatorname{supp} \omega \subset \bigcup_{i=1}^{l} V_i$ und sei $\{\xi_i\}_{1 \le i \le l}$ eine Zerlegung der Eins auf $\bigcup_{i=1}^{l} V_i$ bezüglich der offenen Überdeckung $\{V_i\}_{i=1}^{l}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \int_M \eta_i \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_M (\sum_{j=1}^{l} \xi_j) \eta_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \xi_j \eta_i \omega = \sum_{j=1}^{l} \int_M (\sum_{i=1}^{k} \eta_i) \xi_j \omega = \sum_{j=1}^{l} \int_M \xi_j \omega. \quad \square$$

Für jede n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand erhalten wir also eine Abbildung

$$\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}.$$

In der folgenden Proposition fassen wir die Eigenschaften von $\int_M$ zusammen.

Proposition 7.2.5. *Sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand.*

(i) $\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ *ist linear.*

(ii) Falls M kompakt und $\omega \in \Omega^n(M)$ die Orientierung auf M induziert, dann gilt $\int_M \omega > 0$.

(iii) Sei N eine weitere n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $F\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus. Falls F orientierungserhaltend ist, gilt

$$\int_N \omega = \int_M F^*(\omega)$$

für jedes $\omega \in \Omega_c^n(N)$. Falls F orientierungs-umkehrend ist, gilt

$$\int_N \omega = -\int_M F^*(\omega)$$

für jedes $\omega \in \Omega_c^n(N)$.

Bemerkung 7.2.6. Sei M eine Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir nennen eine stetige Abbildung $\omega\colon M \to \Omega^k(M)$ mit $\omega_p \in \Lambda^k(T_pM)$ eine *stetige k-Form.* Es ist leicht zu sehen, dass die Komponentenfunktionen von ω in einer beliebigen Karte stetig sind. Sei M nun n-dimensional und orientiert. Sei ω eine kompakt-getragene stetige n-Form. Wir können dann $\int_M \omega$ genau wie oben definieren: Falls der Träger von ω im Definitionsbereich einer (negativ) orientierten Karte mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$ enthalten und f die Komponentenfunktion von ω in dieser Karte ist, setzen wir $\int_M \omega = \pm f$ (wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob die Karte orientiert oder negativ orientiert ist). Im allgemeinen Fall, benutzen wir wie oben eine Zerlegung der Eins.

Beispiel 7.2.7. Sei $M \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n\}$ versehen mit der Standard-Orientierung. Sei $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Dann existiert $f \in C_c^\infty(M)$, sodass $\omega = f \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \mathrm{d}r^n$. Damit gilt

$$\int_M \omega = \int_M f,$$

wobei wir mit $\int_M f$ das Lebesgue-Integral von f bezeichnen.

In konkreten Fällen ist es nicht praktisch Differentialformen direkt mithilfe der obigen Definition zu integrieren. Wir erwähnen jetzt eine bessere Methode für die Berechnung von Integralen von Differentialformen. Wir benötigen zuerst eine

Definition 7.2.8. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand. Eine Teilmenge $S \subset M$ heißt eine Nullmenge, falls abzählbar viele Karten $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda}$ existieren, sodass $S \subset \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$ und $\varphi_i(U_i \cap S)$ für alle $i \in \Lambda$ eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Proposition 7.2.9. *Sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand und seien $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_k, \varphi_k)$ orientierte Karten, sodass U_i disjunkt und $M \setminus (\bigcup_{i=1}^k U_i)$ eine Nullmenge ist. Dann gilt*

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} (\varphi^{-1})^*(\omega).$$

Aufgabe 7.2.10. Betrachten Sie die zwei-Form

$$\omega = r^1 \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3 + r^3 \mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}r^3 \wedge \mathrm{d}r^1$$

auf $\mathbb{R}^3$. Versehen Sie S^2 mit ihrer Standard-Orientierung und berechnen Sie $\int_S^2 \iota^*(\omega)$ einmal mit und einmal ohne Verwendung von Satz von Stokes, wobei wir mit ι die Inklusionsabbildung $S^2 \to \mathbb{R}^3$ bezeichnen.

7.3 Satz von Stokes

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Stokes. Dieser grundlegende Satz in der Differentialgeometrie ist eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Theorem 7.3.1 (Satz von Stokes)**.** *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ($\partial M = \emptyset$ ist erlaubt). Sei $\iota\colon \partial M \to M$ die Inklusionsabbildung. Dann gilt*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \iota^*(\omega)$$

für jede $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$, wobei wir ∂M mit der Stokes-Orientierung versehen. Falls $\partial M = \emptyset$, interpretieren wir die rechte Seite als 0.

Bemerkung 7.3.2. Wir benutzen die Notation von oben. Nach der Identifikation der Tangentialräume von ∂M mit Teilräumen von Tangentialräumen von M, ist $\iota^*(\omega)$ nichts anderes als die Einschränkung von ω auf ∂M. Daher schreibt man häufiger $\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$.

Wir beweisen zuerst einen Spezialfall vom Satz von Stokes. Im Folgenden versehen wir $\mathbb{H}^n$ mit der Standard-Orientierung und $\partial\mathbb{H}^n$ mit der Stokes-Orientierung.

Proposition 7.3.3. *Sei $\omega \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{H}^n)$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega.$$

Beweis. Es gibt glatte Funktionen $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, sodass

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}r^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n.$$

Dann gilt

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial r^i} f_i \mathrm{d}r^i \wedge \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}r^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial r^i} f_i \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n.$$

Da $\operatorname{supp}\omega$ kompakt ist, existiert ein R, sodass $\operatorname{supp}\omega$ und damit $\operatorname{supp} f_i$ in der Menge

$$\{(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{H}^n | -R < \xi^1, \ldots, \xi^{n-1} < R, 0 \leq \xi^n < R\}$$

enthalten sind. Wir berechnen

$$\int_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\omega = \sum_i (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial f_i}{\partial r^i} = \sum_i (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial f_i}{\partial r^i} \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^n.$$

Für $i \neq n$ benutzen wir den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und erhalten wir $\int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \frac{\partial f_i}{\partial r^i} \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^n =$

$$\int_0^R \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \big(f_i(r^1, \ldots, R, \ldots, r^n) - f_i(r^1, \ldots, -R, \ldots, r^n)\big) \,\mathrm{d}r^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}r^i} \cdots \mathrm{d}r^n = 0$$

Es gilt also $\int_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\omega$

$$(-1)^{n-1} \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \big(f_n(r^1, \ldots, r^{n-1}, R) - f_n(r^1, \ldots, r^{n-1}, 0)\big) \,\mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^{n-1} =$$

$$(-1)^n \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R f_n(r^1, \ldots, r^{n-1}, 0) \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^{n-1}.$$

Wir bezeichnen mit $\iota\colon \partial M \to M$. Dann gilt $\iota^*(\mathrm{d}r^n) = 0$, da r^n auf ∂H^n verschwindet. Daraus folgt

$$\iota^*(\omega) = \iota^*(\sum_{i=1}^n f_i \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}r^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^n) = \iota^*(f_n \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^{n-1})$$

$$= (f_n \circ \iota) \mathrm{d}r^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^{n-1}.$$

Die Identitätskarte auf $\partial\mathbb{H}^n$ ist genau dann eine orientierte Karte, wenn n gerade ist. Daher gilt

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \iota^*(\omega) = (-1)^n \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R f_n(r^1, \ldots, r^{n-1}, 0) \mathrm{d}r^1 \cdots \mathrm{d}r^{n-1}.$$

Die Behauptung folgt. □

Bemerkung 7.3.4. Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand und sei (U, φ) eine Karte mit Koordinatenfunktionen $\{x^1, \ldots, x^n\}$. $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ ist dann insbesondere ein Diffeomorphismus und es gilt $(\varphi_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\varphi(p)}$. Daraus folgt, dass (U, φ) genau dann eine orientierte oder negativ orientierte Karte ist, wenn φ eine orientierungs-erhaltende bzw. -umkehrende Abbildung ist.

Bemerkung 7.3.5. Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand und sei (U, φ) eine orientierte Karte. Wir setzen $\widetilde{U} = U \cap \mathbb{H}^n$ und

$$\widetilde{\varphi} \coloneqq \varphi|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to \varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n.$$

Wir behaupten, dass $\widetilde{\varphi}$ eine orientierungs-erhaltende Abbildung ist, wenn $\widetilde{U}$ und $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$ mit der Stokes-Orientierung versehen werden. In der Tat: Sei $p \in \widetilde{U}$. Wegen Bemerkung 7.3.4 ist $(-\frac{\partial}{\partial x^n}|_p, \frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}|_p)$ genau dann eine orientierte Basis von T_pM, wenn

$$((\varphi_*)_p(-\frac{\partial}{\partial x^n}|_p), (\varphi_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p), \ldots, (\varphi_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}|_p)) = (-\frac{\partial}{\partial r^n}|_{\varphi(p)}, \frac{\partial}{\partial r^1}|_{\varphi(p)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial r^{n-1}}|_{\varphi(p)})$$

eine orientierte Basis von $T_{\varphi(p)}M$ ist. Daher ist $(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}|_p)$ genau dann eine orientierte Basis von $T_p\partial M$, wenn $((\widetilde{\varphi}_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p), \ldots, (\widetilde{\varphi}_*)_p(\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}|_p)) = (\frac{\partial}{\partial r^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial r^{n-1}}|_p)$ eine orientierte Basis von $T_{\varphi(p)}\partial\mathbb{H}^n$ ist. Ähnlich zeigt man, dass falls (U, φ) negativ orientiert ist, die Abbildung $\varphi|_{U \cap \partial M}$ orientierungs-umkehrend ist.

Um den Satz von Stokes zu beweisen, benutzen wir die folgende Proposition, die ein Analogon von 7.3.3 für allgemeine Mannigfaltigkeiten ist.

Proposition 7.3.6. *Sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ so, dass eine orientierte oder negativ orientierte Karte (U, φ) mit $\operatorname{supp} \omega \subset U$ existiert. Dann gilt*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \iota^*(\omega),$$

wobei wir mit ι die Inklusionsabbildung $\partial M \to M$ bezeichnen.

Beweis. Wir beweisen die Aussage in dem Fall, dass (U, φ) eine orientierte Karte ist. Der Beweis in dem Fall, dass (U, φ) negativ orientiert ist, ist analog. Wegen Bemerkung 7.3.4 gilt

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_U \mathrm{d}\omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\mathrm{d}(\omega)) = \int_{\varphi(U)} \mathrm{d}((\varphi^{-1})^*(\omega)).$$

Da $\operatorname{supp}(\varphi^{-1})^*(\omega)$ kompakt und in einer offenen Teilmenge $\varphi(U)$ von $\mathbb{H}^n$ enthalten ist, können wir $(\varphi^{-1})^*(\omega)$ durch Fortsetzung mit 0 zu einer $(n-1)$-Form auf $\mathbb{H}^n$ erweitern, die wir mit η bezeichnen. Wir setzen $\widetilde{U} \coloneqq U \cap \partial M$ und $\widetilde{\varphi} \coloneqq \varphi|_{\widetilde{U}}$. Dann gilt

$$\int_{\varphi(U)} \mathrm{d}((\varphi^{-1})^*(\omega)) = \int_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\eta = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \iota_{\partial\mathbb{H}^n}^*(\eta).$$

Falls $\widetilde{U} = \emptyset$ (insbesondere falls $\partial M = \emptyset$), gilt $\iota_{\partial\mathbb{H}^n}^*(\eta) = 0$ und damit

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \iota_{\partial\mathbb{H}^n}^*(\eta) = 0.$$

Sonst gilt $\int_{\partial\mathbb{H}^n} \iota_{\partial\mathbb{H}^n}^*(\eta) =$

$$\int_{\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})} \iota_{\partial\mathbb{H}^n}^*((\varphi^{-1})^*(\omega)) = \int_{\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})} (\varphi^{-1} \circ \iota_{\partial\mathbb{H}^n})^*(\omega) = \int_{\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})} (\iota \circ \widetilde{\varphi}^{-1})^*(\omega) = \int_{\widetilde{U}} \iota^*(\omega) = \int_{\partial M} \iota^*(\omega),$$

wobei $\iota_{\partial\mathbb{H}^n} : \partial\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ die Inklusionsabbildung bezeichnet und wir Proposition 7.3.3 und Bemerkung 7.3.5 benutzt haben. Die Behauptung folgt. $\square$

Beweis von Theorem 7.3.1. Sei $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$. Seien $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_k, \varphi_k)$ orientierte oder negativ orientierte Karten mit $\operatorname{supp} \omega \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$. Sei $\{\eta_i\}$ eine Zerlegung der Eins auf $\bigcup_{i=1}^k U_i$ bezüglich der offenen Überdeckung $\{U_1, \dots, U_k\}$. Dann gilt

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^k \int_M \eta_i \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^k \left[\int_M \mathrm{d}(\eta_i \omega) - (\mathrm{d}\eta_i) \wedge \omega\right] = \sum_{i=1}^k \int_M \mathrm{d}(\eta_i \omega) - \int_M \mathrm{d}(\sum_{i=1}^k \eta_i) \wedge \omega.$$

Da $\sum_{i=1}^k \eta_i$ auf $\operatorname{supp} \omega$ konstant ist, verschwindet $\mathrm{d}(\sum_{i=1}^k \eta_i) \wedge \omega$ und wir erhalten

$$\sum_{i=1}^k \int_M \mathrm{d}(\eta_i \omega) - \int_M \mathrm{d}(\sum_{i=1}^k \eta_i) \wedge \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\partial M} \iota^*(\eta_i \omega) = \sum_{i=1}^k \int_{\partial M} \eta_i \iota^*(\omega) = \int_{\partial M} \iota^*(\omega),$$

wobei wir Proposition 7.3.3 benutzen. □

Aufgabe 7.3.7. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $\gamma\colon [a, b] \to M$ eine glatte Einbettung. $S := \operatorname{Im}(\gamma)$ ist dann auf natürliche Weise eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von M. Wir versehen S mit der Orientierung, die γ zu einer orientierungserhaltende Abbildung macht. Sei $f \in C^\infty(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_S \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

7.4 Integration von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten

Sei M eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass jede n-Form, die die Orientierung auf M induziert, ein (positives) Maß auf M definiert. Dies erlaubt uns, Funktionen auf M zu integrieren. Das so definierte Integral hängt jedoch von dem gewählten n-Form ab.

Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Mit $C_c(X; \mathbb{R})$ bezeichnen wir den Vektorraum der stetigen kompakt-getragenen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf X. Eine sehr praktische Weise Maße auf X zu definieren ist durch den Riesz-Markov-Kakutani-Satz gegeben. Bevor wir diesen Satz formulieren benötigen wir eine

Definition 7.4.1. Sei X wie oben. Ein Funktional $I\colon C_c(X; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt *positiv*, falls $I(f) \geq 0$ für jedes $f \in C_C(X)$ mit $f \geq 0$ gilt.

Beispiel 7.4.2. Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Sei $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra auf X, die die Borel-σ-Algebra auf X beinhaltet und sei μ ein Maß auf $\mathfrak{M}$. Dann ist

$$I_\mu\colon C_c(X; \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \int_X f \mathrm{d}\mu$$

ein positives Funktional auf $C_c(X; \mathbb{R})$.

Theorem 7.4.3. *Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum und sei $I\colon C_c(X; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein positives Funktional. Dann existieren eine eindeutige σ-Algebra $\mathfrak{M}$ auf X und ein eindeutiges Maß μ auf $\mathfrak{M}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mathfrak{M}$ beinhaltet die Borel-σ-Algebra auf X.

(ii) $\int_X f = I(f)$ für alle $f \in C_c(X; \mathbb{R})$.

(iii) $\mu(K) < \infty$ *für alle kompakten Teilmengen* K *von* X*.*

(iv) Für jedes $E \in \mathfrak{M}$ *gilt*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) | U \subset X \text{ offen}, U \supset E\}.$$

(v) Für jede offene Teilmenge E *von* X *gilt*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K \subset X \text{ kompakt}, K \subset E\}.$$

(vi) Für jedes $A \subset N$ *mit* $N \in \mathfrak{M}$ *und* $\mu(N) = 0$ *gilt* $A \in \mathfrak{M}$*.*

Bemerkung 7.4.4. Falls X in Theorem 7.4.3 eine Vereinigung abzählbar vieler kompakten Mengen ist, gilt (v) für jedes $E \in M$, wobei M und μ durch Theorem 7.4.3. gegeben sind.

Sei M eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit oder Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ eine n-Form, die die Orientierung auf M induziert. Aus der Definition des Integrals von Differentialformen (vgl. auch Bemerkung 7.2.6) folgt unmittelbar, dass die Funktional

$$I_\omega \colon C_c(M; \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad f \mapsto \int_M f\omega$$

positiv ist. Nach Anwendung von Theorem 7.4.3 auf das Funktional I_ω erhalten wir ein Maß μ_ω auf M, das mindestens auf der Borel-σ-Algebra von M definiert ist, sodass

$$\int_M f \mathrm{d}\mu_\omega = I_\omega(f) = \int_M f\omega$$

für alle $f \in C_c(M; \mathbb{R})$ gilt. Wie üblich können wir dann mithilfe von μ_ω die Räume $\mathrm{L}^p(M, \mu_\omega)$ definieren.

Literaturverzeichnis

[1] Michel A. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. **34** (1960), 257–270. MR139172 ↑2.2.21

[2] Michel A. Kervaire and John W. Milnor, *Groups of homotopy spheres. I*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), 504–537. MR148075 ↑2.2.21

[3] John Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 399–405. MR82103 ↑2.2.21